

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

*N° attribué par la bibliothèque*

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**THÈSE**

pour obtenir le grade de **DOCTEUR DE L'INP Grenoble**

**Spécialité : « Mathématiques appliquées »**

préparée au laboratoire Laboratoire Jean Kuntzmann dans le cadre de l'École

**Doctorale « Mathématiques, Sciences et  
Technologies de l'Information, Informatique »**

préparée et soutenue publiquement par

**Marc HONNORAT**

le 3 octobre 2007

---

**ASSIMILATION DE DONNÉES LAGRANGIENNES  
POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE EN  
HYDRAULIQUE FLUVIALE**

---

**JURY**

M. Michel VAUCLIN

M. Olivier THUAL

M. Jean-Charles GILBERT

M. François-Xavier LE DIMET

M. Jérôme MONNIER

M. Jean-Michel TANGUY

Président

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de thèse

Co-directeur

Examineur



# Table des matières

<b>Résumé étendu</b>	<b>1</b>
<b>Extended abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
L'assimilation de données . . . . .	5
Applications en hydraulique fluviale . . . . .	6
Les observations . . . . .	7
Les outils de télédétection . . . . .	8
<b>1 Fondements de l'assimilation variationnelle de données</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Équations continues . . . . .	13
1.2.1 Espaces fonctionnels . . . . .	13
1.2.2 Modèle direct . . . . .	13
1.2.3 Fonction coût . . . . .	14
1.2.4 Modèle linéarisé . . . . .	16
1.2.5 Modèle adjoint . . . . .	18
1.2.6 Système d'optimalité . . . . .	19
1.2.7 Extensions . . . . .	20
1.3 Représentation schématique des modèles . . . . .	25
1.3.1 Boîtes-opérateurs . . . . .	25
1.3.2 Programmes informatiques . . . . .	28

1.3.3	Écriture du code adjoint . . . . .	28
1.4	Différentiation automatique . . . . .	30
1.4.1	Principes de la différentiation automatique . . . . .	30
1.4.2	Mise en œuvre de la différentiation automatique . . . . .	31
1.4.3	Outils de différentiation automatique . . . . .	33
1.4.4	Présentation de Tapenade . . . . .	34
1.4.5	Validation du code adjoint . . . . .	34
1.5	Algorithme de minimisation . . . . .	36
1.5.1	Algorithme de Quasi-Newton . . . . .	37
1.5.2	Approximation de l'inverse de la Hessienne . . . . .	37
1.5.3	Calcul du pas de descente . . . . .	38
1.5.4	Critère d'arrêt de l'algorithme . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Modèle Saint-Venant pour l'hydraulique fluviale</b>	<b>41</b>
2.1	Le modèle Saint-Venant . . . . .	41
2.1.1	Dérivation des équations de Saint-Venant . . . . .	42
2.1.2	Équations de Saint-Venant pour l'hydraulique fluviale . . . .	44
2.1.3	Conditions aux limites . . . . .	45
2.2	Dérivation des équations adjointes . . . . .	46
2.2.1	Fonction coût . . . . .	46
2.2.2	Modèle linéarisé . . . . .	47
2.2.3	Dérivation des équations adjointes . . . . .	47
2.3	Discretisation des équations . . . . .	50
2.3.1	Hyperbolicité . . . . .	50
2.3.2	Schéma volumes finis . . . . .	52
2.4	Le logiciel Dassflow . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Expériences d'assimilation de données eulériennes</b>	<b>61</b>
3.1	Principe des expériences jumelles . . . . .	62
3.2	Données réelles : Pearl River . . . . .	63
3.2.1	Domaine de calcul . . . . .	63
3.2.2	Observations . . . . .	63
3.2.3	Identification de conditions aux limites . . . . .	63
3.2.4	Résultats numériques . . . . .	65
3.2.5	Conclusion . . . . .	66
3.3	Cas test : identification du débit et du coefficient de Manning . . .	67
3.3.1	Configuration de test . . . . .	67
3.3.2	Création des observations . . . . .	67
3.3.3	Résultats numériques . . . . .	69
3.3.4	Conclusion . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Principes de l'assimilation de trajectoires</b>	<b>75</b>
4.1	Données lagrangiennes . . . . .	76
4.2	Modèle de transport . . . . .	77
4.2.1	Équation de transport . . . . .	77
4.2.2	Vitesse de transport . . . . .	78
4.2.3	Intégration au modèle général . . . . .	79
4.2.4	Fonction coût et système adjoint . . . . .	80
4.3	Discretisation numérique des trajectoires . . . . .	82
4.3.1	Discretisation en temps . . . . .	82
4.3.2	Discretisation en espace . . . . .	84
4.4	Filtrage des observations de trajectoires . . . . .	86
4.4.1	Rééchantillonnage des observations . . . . .	86
4.4.2	Construction d'une trajectoire filtrée . . . . .	88
4.4.3	Mise en œuvre numérique du filtrage . . . . .	89
4.5	Conclusion . . . . .	90

<b>5</b>	<b>Expériences d'assimilation de trajectoires</b>	<b>91</b>
5.1	Cas test : identification du débit et du coefficient de Manning . . .	91
5.1.1	Configuration de l'expérience . . . . .	92
5.1.2	Observations de trajectoires . . . . .	92
5.1.3	Résultats numériques . . . . .	93
5.1.4	Conclusion . . . . .	95
5.2	Cas test : identification de la topographie et des conditions initiales	95
5.2.1	Perturbation des trajectoires numériques . . . . .	96
5.2.2	Configuration de l'expérience . . . . .	96
5.2.3	Création des observations . . . . .	97
5.2.4	Identification de la topographie seule . . . . .	100
5.2.5	Identification de la topographie et des conditions initiales . .	104
5.2.6	Conclusion . . . . .	108
5.3	Assimilation de données réelles . . . . .	109
5.3.1	Configuration de l'expérience . . . . .	109
5.3.2	Observations . . . . .	109
5.3.3	Simulation Saint-Venant de référence . . . . .	112
5.3.4	Assimilation de données . . . . .	114
5.3.5	Conclusion . . . . .	120
	<b>Conclusion générale</b>	<b>123</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>127</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>

## Résumé étendu

Nous présentons dans cette thèse des travaux portant sur l'assimilation variationnelle de données pour l'hydraulique fluviale. Nous nous sommes intéressés en particulier à l'assimilation de données lagrangiennes dans un modèle de rivière basé sur les équations de Saint-Venant. Les modèles numériques sont devenus aujourd'hui des outils couramment utilisés dans le domaine de l'hydraulique fluviale. D'autre part, les méthodes d'assimilation de données permettent de prendre en compte toute l'information disponible sur un système physique en vue de sa modélisation : celle contenue dans le modèle et celle portée par les observations.

Dans une première partie, nous présentons les fondements de l'assimilation variationnelle de données du point de vue de la théorie du contrôle optimal, en mettant l'accent sur le lien entre le problème d'assimilation sous sa forme de système d'optimalité et la mise au point du modèle adjoint à l'aide d'outils de différentiation automatique de codes.

Nous présentons dans un deuxième temps un modèle de rivière basé sur les équations de Saint-Venant bidimensionnelles et mis en œuvre dans le logiciel Dassflow, co-développé au cours de cette thèse dans le but de réaliser les simulations numériques et les expériences d'assimilation de données. Le schéma numérique du modèle direct repose sur la méthode des volumes finis et un modèle adjoint a été développé en utilisant l'outil de différentiation automatique Tapenade.

Dans un troisième chapitre, nous montrons une expérience d'assimilation de données réelles qui concerne l'identification de conditions aux limites dans le delta de la rivière des Perles (Xi Jiang). Puis une série d'expériences jumelles illustre le problème du manque de données d'observations classiquement disponibles dans les problèmes d'assimilation lorsque certains paramètres du modèle sont mal estimés. Nous montrons un exemple où des mesures synthétiques de hauteurs d'eau deviennent insuffisantes pour l'identification du débit.

Le développement des moyens de télédétection pour l'observation des rivières permet d'envisager la prise en compte de nouvelles formes de données dans les méthodes d'assimilation. Dans cette thèse, nous nous intéressons en particulier à des observations de nature lagrangienne. Nous décrivons dans le quatrième chapitre une méthode d'assimilation variationnelle de trajectoires de particules transportées à la surface de l'écoulement. Ces observations sont représentées dans le modèle comme la variable d'état d'une équation de transport faiblement couplée avec le

système d'équations de Saint-Venant. Cette approche rend très simple leur intégration dans un processus d'assimilation de données. Par ailleurs, une méthode de filtrage des observations de trajectoires est proposée pour traiter les perturbations de surface de petites échelles ainsi que les effets de la quantification introduite par le système d'observation des trajectoires.

Le cinquième chapitre présente des expériences jumelles mettant en évidence l'intérêt de la prise en compte d'observations de trajectoires de particules pour l'identification de paramètres par rapport à de simples observations de nature eulérienne. Nous montrons dans un premier temps l'exemple de l'identification du débit abordé plus tôt, puis celui de l'identification conjointe de la topographie et des conditions initiales. Enfin, nous présentons une expérience utilisant des données réelles issues d'un écoulement dans un canal au-dessus d'un obstacle immergé. Des trajectoires de confettis lâchés à la surface de l'écoulement sont extraites d'une séquence vidéo et sont utilisées conjointement à des mesures de hauteur d'eau dans une expérience d'assimilation de données.

**Mots clés :** assimilation variationnelle de données, hydraulique fluviale, données lagrangiennes, identification de paramètres, modèle numérique, équations de Saint-Venant, différentiation automatique.



## Extended abstract

In this thesis, we present some work related to variational data assimilation for river hydraulics. We are particularly interested in the assimilation of Lagrangian data in a river model based on the shallow water equations. Numerical models are nowadays commonly used in river hydraulics. Besides, data assimilation methods make it possible to take account of all information available on a physical system : that contained in the model and that carried by observations.

In a first part, we present the bases of variational data assimilation from the point of view of the optimal control theory, by emphasizing the link between the assimilation problem as an optimality system and the development of the adjoint model using automatic differentiation tools.

A second part is dedicated to the presentation of a river model based on the two-dimensional shallow water equations. The model is implemented in a software called Dassflow, co-developed during this thesis in order to carry out the numerical simulations and the data assimilation experiments. The numerical scheme of the direct model relies on the finite volume method. An adjoint model was developed by using the automatic differentiation tool Tapenade.

In a third chapter, we present an assimilation experiment with real data for the identification of boundary conditions in the delta of the Pearl River (Xi Jiang). Then, a series of twin experiments illustrates a problem of lack of data arising when some parameters of the model are badly estimated and when classically available observations of water depth are sparse in space. We show an example where synthetic measurements of water depth become insufficient for the identification of the discharge.

The development of remote sensing methods for the monitoring of rivers makes it possible to consider the integration of new forms of data in assimilation methods. In this thesis, we are interested in particular in the assimilation of Lagrangian data. In the fourth chapter, we describe a variational assimilation method of trajectories of particles transported on the surface of the flow. These observations are represented in the model as the state variable of a transport equation weakly coupled with the system of shallow water equations. With this approach, the integration of trajectories observations in a data assimilation process is straightforward. In addition, a filtering method for trajectory data is proposed in order to deal with the small-scale perturbations of the free surface. The filter is also efficient to get rid of the effects of the quantification produced by the observation system.

The fifth chapter presents twin experiments that demonstrate the beneficial effect of trajectories as additional information for the identification of model parameters compared to simple eulerian observations. We start by the example of the identification of the discharge introduced earlier. Then, we study the joint identification of topography and initial conditions. Finally, we present an experiment that uses real data stemming from a flow in a channel above an immersed obstacle. Trajectories of confetti scattered on the surface of the flow are extracted from a video film and are used jointly with water level measurements in a data assimilation experiment.

**Keywords :** variational data assimilation, river hydraulics, lagrangian data, parameter identification, numerical model, shallow water equations, automatic differentiation.

# Introduction

Les modèles numériques sont aujourd’hui couramment utilisés dans le domaine de l’hydraulique fluviale. Ils sont devenus des outils incontournables pour la prévention des inondations, que ce soit pour la simulation d’évènements de crues passés ou hypothétiques ou bien l’étude des conséquences de la construction d’aménagements sur une rivière.

Basé sur les équations de la mécanique des fluides, un modèle numérique de rivière décrit l’évolution de l’écoulement à partir d’un état initial, en fonction des caractéristiques du terrain et de données sur l’état aux bords du domaine d’étude. Le résultat d’une simulation doit traduire la réalité de l’écoulement, ce qui recouvre des aspects différents selon les problèmes envisagés : dans le cas d’un épisode de crue par exemple, il est important de pouvoir déterminer avant tout l’étendue du domaine inondé. La vitesse de l’écoulement dans les zones inondées peut aussi constituer une information utile pour les plans de prévention des crues.

## L’assimilation de données

Issues de mesures effectuées directement dans l’écoulement ou bien à distance, les observations du système physique réel doivent être prises en compte pour réaliser une simulation. Plus généralement, toute la connaissance disponible sur un système hydraulique particulier doit être utilisée pour sa modélisation afin de produire une simulation la plus proche possible de la réalité. Si l’*information mathématique* contenue dans les équations est donnée par le modèle numérique, il est également nécessaire de prendre en compte l’*information physique* provenant des observations. Les méthodes d’**assimilation de données** permettent de combiner de façon optimale ces deux sources d’information [57].

Le formidable développement des méthodes d’assimilation de données a bénéficié dans un premier temps à des problématiques d’analyse et de prévision en météorologie puis en océanographie, domaines dans lesquels elles sont d’ailleurs aujourd’hui utilisées de manière opérationnelle. L’assimilation de données est de plus en plus

étudiée dans de nombreux autres domaines d'applications, comme en hydrologie, en agronomie, en glaciologie ou en hydraulique fluviale.

Pour simplifier, on peut distinguer deux grandes classes de méthodes d'assimilation de données. D'une part, les méthodes de filtrage sont essentiellement basées sur la théorie de l'estimation statistique optimale ; on les appelle également méthodes stochastiques. D'autre part, les méthodes variationnelles sont basées sur la théorie de l'optimisation. Essentiellement déterministes, celles-ci reposent sur la minimisation d'une fonctionnelle mesurant l'écart entre les observations et leur équivalent donné par le modèle. Elles sont tout à fait adaptées aux modèles complexes régissant les fluides géophysiques. Nous faisons dans le chapitre 1 une présentation de l'assimilation variationnelle de données du point de vue de la théorie du contrôle optimal.

## Applications en hydraulique fluviale

Concernant les problèmes d'hydraulique fluviale, les simulations numériques sont couramment réalisées avec des modèles basés sur les équations de Saint-Venant, ou *shallow water* en anglais. Elles décrivent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement de l'eau sous certaines hypothèses qui sont généralement vérifiées dans les écoulements de rivières. Le modèle de rivière utilisé dans cette thèse est basé sur les équations bidimensionnelles de Saint-Venant. Présenté dans le chapitre 2, il est mis en œuvre dans un logiciel nommé Dassflow, co-développé au cours de cette thèse afin de réaliser les expériences numériques d'assimilation de données.

Dans le modèle mathématique, l'écoulement est représenté par une variable dite d'état qui est la solution des équations de Saint-Venant. Cette solution est déterminée par la condition initiale de l'écoulement ainsi que par les conditions aux limites qui peuvent faire intervenir la valeur du débit ou le niveau de la surface libre aux bords du domaine. Mais d'autres paramètres du modèle déterminent également la solution. En effet, afin de pouvoir réaliser une simulation d'un système hydraulique particulier, il faut définir la configuration physique du domaine, comme la topographie du fond de la rivière et des zones inondables. L'utilisation des informations disponibles sur la topographie est un point critique de la construction d'un bon modèle [5]. Par ailleurs, certains phénomènes physiques sont modélisés par des lois empiriques qui doivent être adaptées à la réalité du terrain. Ainsi, l'effet des forces de frottement sur le fond de la rivière est décrit par une loi paramétrée, telle que la formule de Manning. Le paramètre associé, comme le coefficient de Manning, n'est cependant pas une grandeur physique directement mesurable ; en fixer une

bonne valeur pour une configuration donnée nécessite par conséquent une certaine expertise [2].

Les conditions initiales, les conditions aux limites, ainsi que la valeur des autres paramètres du modèle déterminent donc le résultat d'une simulation : ce sont les variables de contrôle du modèle. Elles ne sont pourtant souvent connues que de manière très partielle et avec une marge d'erreur importante. Le problème du calage des paramètres est donc un enjeu important pour la réalisation de simulations pertinentes. Dans cette optique, les méthodes d'assimilation de données permettent d'identifier la valeur des variables de contrôle qui permet de faire correspondre aux mieux l'état du système à la réalité des observations.

Les méthodes d'assimilation de données en hydraulique fluviale ont été utilisées notamment pour des problèmes d'identification du coefficient de Manning [52, 3] sur des configurations en canaux avec des modèles Saint-Venant unidimensionnels, ou des modèles de rivière bidimensionnels [20]. Pour l'identification du débit comme condition limite à partir d'observations de hauteurs d'eau, on peut citer également [39, 63] où le problème est abordé avec le filtre de Kalman et Kalman d'Ensemble et des modèles 1D et 2D. Concernant la topographie, Roux et Dartus [78, 79] étudient l'identification de la géométrie des sections d'un canal pour un modèle Saint-Venant unidimensionnel à partir d'observations de la largeur de l'écoulement. Bélanger et Vincent [7] ont utilisé une méthode variationnelle pour identifier des conditions initiales pour un modèle bidimensionnel prenant en compte la sédimentation. Par ailleurs, Yang [99] a étudié en détail l'usage de l'assimilation variationnelle de données pour des problèmes de transport de sédiments en rivière avec un modèle Saint-Venant bidimensionnel et Mazauric [64] s'est intéressé à des problèmes d'identification de paramètres, d'analyse de sensibilité, de couplage et de parallélisation. Dans cette thèse, nous nous proposons d'aborder le problème de l'assimilation variationnelle de données pour l'identification des paramètres des équations de Saint-Venant bidimensionnelles en considérant tout d'abord des observations classiques dans le prolongement des travaux cités ci-dessus, puis en s'intéressant à de nouvelles formes d'observations.

## Les observations

Nous distinguerons dans notre approche deux grandes classes d'observations en fonction de la nature de leur représentation : les observations **eulériennes** et les observations **lagrangiennes**. Nous appelons eulériennes les observations faites en un point fixe du domaine d'étude. En hydraulique fluviale, il s'agit des observations communément disponibles de hauteur d'eau et de vitesse. Par opposition, des observations effectuées au fil de l'eau de quantités transportées par le courant

seront qualifiées de lagrangiennes. En effet, la localisation de l'observation varie alors en fonction de l'évolution de l'écoulement.

Les observations eulériennes sont celles qui sont classiquement disponibles en hydraulique fluviale. Un capteur placé à un endroit fixe dans le lit mineur de la rivière permet d'effectuer des mesures *in situ* de la hauteur d'eau, éventuellement de manière continue en temps. Des mesures de vitesse dans l'écoulement sont également possibles mais sont beaucoup plus complexes à mettre en œuvre techniquement. Cependant, ces mesures intrusives sont quasiment impossibles à effectuer au cours d'un évènement de crue importante car les fortes vitesses et les débris flottants mettent alors en danger les opérateurs et le matériel.

Des estimations du débit de la rivière sont aussi couramment réalisées à l'aide de mesures de hauteurs d'eau et d'une courbe de tarage. Cette dernière, construite au préalable grâce à une étude approfondie des profils de vitesse sur une section donnée de la rivière, établit une relation entre le débit et la hauteur d'eau. La connaissance du débit ne résulte donc pas directement d'une observation de celui-ci. Le lecteur peut se référer à [4] pour une revue détaillée de ces méthodes classiques de mesures. En dehors des périodes de crues, les techniques actuelles de mesure sur les rivières permettent de collecter des observations de hauteur d'eau avec une fréquence potentiellement importante en temps, mais avec une densité très faible en espace. Les observations de vitesse sont encore plus difficiles à obtenir.

Nous présentons dans le chapitre 3 des expériences d'assimilation de données eulériennes. Une première expérience concerne l'utilisation de mesures réelles de hauteurs d'eau pour l'identification de conditions aux limites sur le delta de la rivière des Perles (Xi Jiang). Puis dans le cadre d'expériences jumelles autour d'une configuration académique, nous montrons les conséquences d'une trop faible densité d'observations sur la qualité de l'identification des paramètres, lorsque certaines données du problème ne sont pas connues de manière suffisamment précise, comme c'est souvent le cas pour la simulation de systèmes hydrauliques réels.

## Les outils de télédétection

Afin de pallier ce manque de données, de nouveaux moyens d'observation sont expérimentés depuis quelques années. Notamment basés sur des méthodes de télédétection, certains permettent de recueillir des formes d'observations différentes de celles habituellement disponibles, nécessitant d'envisager de nouvelles méthodes pour les intégrer dans un processus d'assimilation de données. L'imagerie satellite ou aérienne permet par exemple d'observer des réseaux hydrauliques à une très grande échelle en espace. Il est notamment possible d'observer sur une image radar

ou photographique le domaine d'extension d'une crue au moment de la prise de vue. Il s'agit alors d'une information sur l'écoulement qui est dense en espace, mais très ponctuelle en temps. En recoupant les images avec des données de terrain, on peut déduire des informations sur la hauteur d'eau de manière distribuée sur le domaine [75, 47] et les utiliser dans un cadre d'assimilation de données [48, 55, 80].

Par ailleurs, l'utilisation d'images de proximité dans le domaine de l'hydraulique est de plus en plus étudiée pour procurer de nouveaux moyens d'observation. Cela peut permettre l'automatisation d'une mesure qui nécessiterait une intervention humaine : par exemple la détection sur des photographies numériques de l'intersection entre la surface libre et une mire graduée pour la mesure à distance la hauteur d'eau [23]. Il s'agit là de l'exploitation de la dimension spatiale de l'observation, par projection dans l'espace physique de données extraites à l'aide de techniques de traitement d'image. Cependant, si l'on prend en compte une succession d'images dans le temps, il est possible d'exploiter également une dimension temporelle. Ainsi, l'usage d'images vidéo est étudié depuis quelques années pour la mesure de vitesses de surfaces [65] notamment à l'aide de méthodes de suivi de particules (PIV, pour *Particle Image Velocimetry* [1]). Cette idée a été exploitée en particulier pour l'estimation du débit sur des sections calibrées de rivières en régime permanent [19, 23, 41], par la construction de courbes de tarage conjointement avec des mesures de hauteurs d'eau.

Que ce soit la mesure de la hauteur d'eau sur une mire ou de la vitesse de surface, l'observation reste de nature eulérienne. Il est cependant possible de sortir de ce cadre eulérien et d'envisager des observations de nature lagrangienne, pour lesquelles l'information ne concerne plus un point fixe du domaine mais est portée par l'écoulement.

Nous proposons ainsi dans cette thèse de considérer l'observation du déplacement de structures à la surface de l'eau : l'évolution de leur position au cours du temps renseigne alors sur la dynamique de l'écoulement. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la prise en compte d'observations de trajectoires de particules dans le processus d'assimilation de données. On décrit leur représentation dans le modèle Saint-Venant et leur utilisation dans la construction de la fonction coût. La mise en œuvre de la méthode dans le logiciel Dassflow est détaillée au niveau du schéma numérique employé. Par ailleurs, une méthode de filtrage des trajectoires est proposée afin d'améliorer la prise en compte de données réelles d'observation.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation de résultats numériques d'identification de paramètres à partir d'observations de trajectoires de particules. Nous y étudions l'apport de cette information supplémentaire par rapport à de simples mesures de hauteur d'eau. Dans un premier temps, nous considérons des observations synthétiques dans le cadre d'expériences jumelles, en reprenant le cas-test introduit dans

le chapitre 3 puis en s'intéressant à l'identification conjointe de la topographie et des conditions initiales dans une configuration académique. Dans un deuxième temps, nous présentons une expérience utilisant des observations réelles de trajectoires de confettis lâchés à la surface d'un écoulement dans un canal au-dessus d'un obstacle immergé. Les données sont extraites d'une séquence vidéo et utilisées conjointement à des mesures de hauteur d'eau dans une expérience d'assimilation de données.



# Chapitre 1

## Fondements de l'assimilation variationnelle de données

Ce chapitre est consacré à une présentation de l'assimilation variationnelle de données dans un cadre formel général. Nous faisons dans la première partie une revue rapide des différentes méthodes d'assimilation de données. La méthode variationnelle est ensuite présentée, dans un premier temps en considérant les modèles sous la forme d'équations continues, puis sous la forme d'opérateurs afin d'introduire la mise en œuvre informatique des méthodes adjointes par la différentiation automatique de codes. Nous terminerons par un rapide aperçu de l'algorithme d'optimisation utilisé pour les expériences numériques réalisées dans cette thèse.

### 1.1 Introduction

On peut classer les différentes méthodes d'assimilation de données en deux grandes familles. D'une part, les méthodes de filtrage sont essentiellement basées sur des principes statistiques. Elles sont également appelées méthodes stochastiques. D'autre part, les méthodes variationnelles, essentiellement déterministes, sont basées sur la théorie de l'optimisation. Elles reposent sur la minimisation d'une fonctionnelle mesurant l'écart entre les observations et leur équivalent donné par le modèle. Nous allons présenter brièvement ces deux grandes familles de méthodes. Pour un panorama plus complet, le lecteur peut se reporter aux articles de synthèse [14, 27].

## Méthodes stochastiques

Les méthodes stochastiques d'assimilation de données sont fondées sur la théorie de l'estimation statistique optimale. L'évolution du modèle est considérée comme un processus aléatoire du fait d'une dynamique stochastique. La méthode la plus connue est le filtre de Kalman [50] qui consiste à corriger la trajectoire de la variable d'état du modèle afin qu'elle coïncide au mieux avec les observations disponibles. En pratique, la méthode revient à minimiser la variance de l'erreur sur l'état analysé (correction par l'écart aux observations de l'état prédit par le modèle).

Le filtre de Kalman suppose un modèle linéaire ainsi qu'une connaissance de l'incertitude sur les mesures et sur l'état prévu à travers des matrices de covariances d'erreur. Il est alors optimal au sens des moindres carrés. Il utilise toute l'information disponible et présente l'intérêt de fournir directement une estimation de la covariance d'erreur de l'état analysé en tenant compte de sa propagation liée à la dynamique du modèle.

Une extension à un modèle non-linéaire est possible en utilisant une linéarisation à chaque pas de temps (Extended Kalman Filter [49]). Mais le filtre n'est alors plus nécessairement optimal. De nombreuses autres extensions ont été proposées. On peut citer notamment le filtre de Kalman d'Ensemble [22] qui utilise une méthode de Monte-Carlo pour estimer efficacement les matrices de covariance d'erreur de prévision. Par ailleurs, des méthodes de réduction d'ordre ont été développées afin de diminuer le coût du filtrage en termes de temps de calcul et d'occupation mémoire en projetant les matrices de covariance d'erreur sur des espaces de dimensions réduites (voir en particulier le filtre SEEK [74]).

## Méthodes variationnelles

Dans les méthodes variationnelles, le problème d'assimilation de données est formulé comme un problème d'optimisation. Elles ont été introduites pour la première fois par Sasaki [83, 84, 85] pour des applications en météorologie. Le modèle d'écoulement est pris comme une contrainte pour la minimisation d'une fonctionnelle mesurant l'écart quadratique entre les observations et les solutions du modèle. L'utilisation des méthodes adjointes basées sur la notion de contrôle optimal (Lions [62]) pour la résolution du problème variationnel a été introduite par Le Dimet [56], Le Dimet et Talagrand [58], Courtier et Talagrand [18, 88].

Les méthodes variationnelles d'assimilation utilisent toutes les observations disponibles sur une fenêtre de temps donnée. Elles ne reposent sur aucune hypothèse de linéarité du modèle d'évolution et sont tout à fait adaptées par exemple aux modèles complexes régissant les fluides géophysiques.

## 1.2 Équations continues

Dans cette partie, nous présentons le principe de l'assimilation variationnelle de données pour des problèmes formulés par des équations d'évolution continues. Les notations utilisées sont pour l'essentiel inspirées de celles introduites par J.-L. Lions dans [62].

### 1.2.1 Espaces fonctionnels

Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert. On suppose que :

$$\begin{aligned} V &\subset H, \text{ l'injection de } V \text{ dans } H \text{ est continue,} \\ V &\text{ est dense dans } H . \end{aligned}$$

$H$  est identifié avec son espace dual. On note  $V'$  le dual de  $V$  et l'on a :

$$V \subset H \subset V' .$$

On définit la variable dite d'état  $y(t) \in V$  qui décrit l'état du système à un instant donné  $t$ . L'espace  $V$  est l'**espace d'état**. On définit également l'espace :

$$W(0, T) = \{f \mid f \in L^2(0, T; V), \partial_t f \in L^2(0, T; V')\} .$$

On a  $y \in W(0, T)$ .

### 1.2.2 Modèle direct

Soit  $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert que l'on appellera **espace des paramètres**. Les paramètres pouvant être variables dans le temps, on introduit l'espace  $\mathcal{U}_T = L^2(0, T; \mathcal{U})$  des fonctions du temps à valeur dans  $\mathcal{U}$  et de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini à partir de celui sur  $\mathcal{U}$  par :

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{U}_T} = \int_0^T \langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{\mathcal{U}} dt . \quad (1.1)$$

La variable d'état du modèle est alors définie comme solution du problème direct :

$$(D) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Étant donnés } (y_0, v) \in H \times \mathcal{U}_T, \text{ trouver } y \in W(0, T) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t y(t) + A(v(t); y(t)) = 0 \quad \forall t \in ]0, T[ \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où  $A : \mathcal{U} \times V \longrightarrow V'$  est un opérateur aux dérivées partielles,  $y_0 \in H$  est la condition initiale et  $v(t) \in \mathcal{U}$  représente les paramètres du modèle à l'instant  $t$ .

Il est clair que la solution  $y$  du problème dépend directement de la valeur des variables  $y_0$  et  $v$ . On nomme celles-ci variables de contrôle du système. On définit l'espace produit des contrôles  $\mathcal{K} = H \times \mathcal{U}_T$  et l'on note le vecteur de contrôle  $\mathbf{k} = (y_0, v)^T$ . La variable d'état  $y$  est une fonction du temps, mais dépend également des variables de contrôle. On marque cette double dépendance en notant  $y(\mathbf{k}; t)$ . Cependant, par souci de clarté dans les notations, on écrira selon le contexte  $y(t)$  ou  $y(\mathbf{k})$  ou bien plus simplement encore  $y$ .

On suppose par la suite que le problème (D) est bien posé [36, 37] au sens suivant :

### Hypothèse 1.2.1

Étant donné  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  et  $T > 0$ , on suppose qu'il existe une unique fonction  $y \in W(0, T)$  solution du problème (D) et que cette solution dépend continûment de  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire que l'application  $\mathcal{K} \rightarrow V : \mathbf{k} = (y_0, v) \mapsto y(\mathbf{k}; t)$  est continue pour tout  $t \in ]0, T[$ .

On fera par la suite l'hypothèse supplémentaire sur la différentiabilité de la solution par rapport au vecteur de contrôle :

### Hypothèse 1.2.2

On suppose que l'application  $\mathcal{K} \rightarrow V : \mathbf{k} = (y_0, v) \mapsto y(\mathbf{k}; t)$  est différentiable au sens de Fréchet pour tout  $t \in ]0, T[$ . En particulier, pour tout vecteur  $\delta \mathbf{k} \in \mathcal{K}$  et pour tout  $t \in ]0, T[$  on a :

$$y(\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}; t) = y(\mathbf{k}; t) + Dy(\mathbf{k}; t) \cdot \delta \mathbf{k} + o(\|\delta \mathbf{k}\|_{\mathcal{K}})$$

où  $Dy(\mathbf{k}; t)$  est la différentielle de  $y(t)$  au point  $\mathbf{k}$ .

## 1.2.3 Fonction coût

L'assimilation variationnelle de données consiste à identifier les variables de contrôle qui minimisent une fonctionnelle mesurant l'écart entre la variable d'état  $y$  solution du problème direct (D) et des observations du système physique que l'on note  $y^{obs}$ . On considère que les observations appartiennent à l'espace  $L^2(0, T; \mathcal{O})$  où  $\mathcal{O}$  est un espace de Hilbert que l'on appelle **espace des observations**. Ce dernier n'est pas nécessairement le même que l'espace d'état  $V$ . Un exemple d'une telle fonctionnelle est donné par :

$$J(\mathbf{k}; y(\mathbf{k})) = \frac{1}{2} \int_0^T \left\| C y(\mathbf{k}; t) - y^{obs}(t) \right\|_{\mathcal{O}}^2 dt + \frac{1}{2} \langle N(y_0 - y_b), y_0 - y_b \rangle_H \quad (1.3)$$

où  $C \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O})$  est un opérateur d'observation, éventuellement dépendant du temps, qui projette la variable d'état du modèle dans l'espace des observations,  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$  est une norme définie sur l'espace  $\mathcal{O}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  est un produit scalaire sur  $H$  et  $N$  est un endomorphisme symétrique défini positif sur  $H$ . La variable  $y_b \in H$  est appelée *ébauche*, c'est une première estimation, ou estimation *a priori* de la condition initiale. Quand on possède une telle estimation, la présence du dernier terme de (1.3) introduit une régularisation du problème qui mène à rechercher un compromis entre l'information donnée par les observations et l'information donnée par cette ébauche.

### Opérateur d'observation non-linéaire

Dans l'exemple donné en (1.3), l'opérateur d'observation est linéaire. Cependant, il est tout à fait possible de considérer le cas plus général où il est défini simplement par :  $C : ]0, T[ \times V \rightarrow \mathcal{O}$ . Dans ce cas, la fonctionnelle  $J$  se réécrit de la manière suivante :

$$J(\mathbf{k}; y(\mathbf{k})) = \frac{1}{2} \int_0^T \left\| C(y(\mathbf{k}; t)) - y^{obs}(t) \right\|_{\mathcal{O}}^2 dt + \frac{1}{2} \langle N(y_0 - y_b), y_0 - y_b \rangle_H .$$

Dans la suite, nous nous intéresserons cependant uniquement à des cas où l'opérateur d'observation est linéaire et dépendant éventuellement du temps.

### Observations ponctuelles en espace

Considérons le cas où les observations ne sont disponibles que de manière ponctuelle en espace, par exemple lorsqu'elles sont issues de capteurs placés à des endroits particuliers du domaine spatial. Supposons qu'un certain nombre de capteurs soient répartis sur le domaine  $\Omega$  et fournissent globalement de manière continue en temps un ensemble de  $M$  mesures scalaires. L'ensemble des observations à l'instant  $t$  consiste donc en un vecteur  $y^{obs}(t) = \{y_m^{obs}(t)\}_{m=1, \dots, M}$  dont chaque composante est une valeur scalaire. Dans ce cas, on peut définir l'espace d'observation par  $\mathcal{O} = \mathbb{R}^M$  et l'opérateur d'observation  $C \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^M)$  qui, à une variable d'état  $y(t)$  fait correspondre sa représentation dans l'espace des observations. On peut alors écrire la fonctionnelle  $J$  ainsi :

$$J(\mathbf{k}; y(\mathbf{k})) = \frac{1}{2} \int_0^T \left\| Cy(\mathbf{k}; t) - y^{obs}(t) \right\|_{\mathbb{R}^M}^2 dt .$$

### Observations ponctuelles en temps

Dans le cas où les observations sont ponctuelles en temps uniquement, par exemple si elles sont disponibles à  $N$  instants  $\{t_i^{obs}\}_{i=1,\dots,N}$ , on peut définir la fonctionnelle  $J$  de la manière suivante :

$$J(\mathbf{k}; y(\mathbf{k})) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\| C_i y(\mathbf{k}; t_i^{obs}) - y_i^{obs} \right\|_{\mathcal{O}}^2 ,$$

où  $C_i \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O})$  est l'opérateur d'observation et  $y_i^{obs}$  la mesure de l'observation à l'instant  $t_i^{obs}$  pour  $i = 1, \dots, N$ . On a alors  $y^{obs} = \{y_i^{obs}\}_{i=1,\dots,N} \in \mathcal{O}^N$ .

### Fonction coût

L'assimilation variationnelle de données consiste à minimiser la fonctionnelle  $J$  sous la contrainte que la variable  $y(\mathbf{k})$  soit solution du problème direct (D). On remarque que la fonctionnelle  $J$  dépend du vecteur de contrôle  $\mathbf{k}$  de manière directe, mais également de manière indirecte par la dépendance de la variable d'état  $y$  à  $\mathbf{k}$  à travers le modèle direct. On définit alors la fonction coût :

$$j(\mathbf{k}) = J(\mathbf{k}; y(\mathbf{k})) . \quad (1.4)$$

Il s'agit donc de minimiser cette fonction coût. Comme nous allons le voir dans la partie 1.2.6, l'approche variationnelle consiste à caractériser une condition nécessaire d'optimalité d'Euler-Lagrange faisant intervenir le gradient de cette fonction coût, c'est-à-dire les dérivées partielles de  $j$  par rapport aux variables de contrôle  $y_0$  et  $v$ . Le calcul efficace de ce gradient permettra d'utiliser une méthode de descente pour résoudre le problème d'optimisation et fera intervenir un modèle adjoint. Pour cela, il faut d'abord introduire le modèle linéarisé.

#### 1.2.4 Modèle linéarisé

Le modèle linéarisé décrit l'évolution de la dérivée directionnelle de la solution  $y$  au modèle direct (D) pour une perturbation  $\delta\mathbf{k}$  du vecteur de contrôle.

On note  $\widehat{dy}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k})$  la dérivée de Gâteaux de la variable d'état  $y$  au point  $\mathbf{k}$  dans la direction  $\delta\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  :

$$\widehat{dy}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{y(\mathbf{k} + \tau\delta\mathbf{k}) - y(\mathbf{k})}{\tau} = \frac{d}{d\tau} y(\mathbf{k} + \tau\delta\mathbf{k})|_{\tau=0} \quad (1.5)$$

Comme on a supposé avec l'hypothèse 1.2.2 que la variable d'état est différentiable au sens de Fréchet par rapport au vecteur de contrôle, cette dérivée de Gâteaux existe et l'on peut écrire :

$$\widehat{dy}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k}) = Dy(\mathbf{k}) \cdot \delta\mathbf{k}.$$

En notant  $\delta y_0$  et  $\delta v$  les composantes du vecteur  $\delta\mathbf{k}$ , on a en développant :

$$Dy(\mathbf{k}) \cdot \delta\mathbf{k} = \frac{\partial y}{\partial y_0}(\mathbf{k}) \cdot \delta y_0 + \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{k}) \cdot \delta v.$$

Pour alléger les notations, on notera parfois par la suite  $dy = \widehat{dy}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k})$ .

Introduisons le modèle linéarisé en dérivant l'équation d'état (1.2) du modèle direct (D) au sens de Gâteaux par rapport au vecteur de contrôle  $\mathbf{k}$  dans la direction  $\delta\mathbf{k}$ .

$$(LT) \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donnés } (y_0, v) \in H \times \mathcal{U}_T, y \in W(0, T) \text{ solution du problème (D)} \\ \text{et un vecteur } (\delta y_0, \delta v) \in H \times \mathcal{U}_T, \text{ trouver } dy \in W(0, T) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t dy(t) + \frac{\partial A}{\partial y}(v(t), y(t)) \cdot dy(t) \\ \quad + \frac{\partial A}{\partial v}(v(t), y(t)) \cdot \delta v(t) = 0 \quad \forall t \in ]0, T[ \\ dy(0) = \delta y_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

### Remarque 1.2.3

Si l'opérateur  $A$  est linéaire par rapport à la variable d'état  $y(t)$  alors on peut noter  $A(v(t); y(t)) = A(v(t)) \cdot y(t)$  et l'on a  $\frac{\partial A}{\partial y}(v(t), y(t)) = A(v(t))$ .

De la même façon, on dérive au sens de Gâteaux la fonction coût définie par la fonctionnelle (1.3) au point  $\mathbf{k}$  dans la direction  $\delta\mathbf{k}$  pour obtenir la dérivée directionnelle :

$$\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k}) = \int_0^T \left\langle C^* \Lambda_{\mathcal{O}}(C y(t) - y^{obs}(t)), dy(t) \right\rangle_{V' \times V} dt + \langle N(y_0 - y_b), \delta y_0 \rangle_H \quad (1.7)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  désigne le produit de dualité,  $\Lambda_{\mathcal{O}}$  est l'isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{O}'$ , espace dual de  $\mathcal{O}$ , et  $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{O}', V')$  est l'opérateur adjoint de  $C$  défini de la manière suivante :

$$\forall \eta \in \mathcal{O}', \quad \forall \xi \in V \quad \langle C^* \eta, \xi \rangle_{V' \times V} = \langle \eta, C\xi \rangle_{\mathcal{O}' \times \mathcal{O}}.$$

De la même manière que pour la dérivée de Gâteaux de la variable d'état, on notera parfois par la suite  $dj = \widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k})$ .

### 1.2.5 Modèle adjoint

Pour obtenir une expression des dérivées partielles de la fonction coût indépendante du vecteur de perturbation  $\delta \mathbf{k}$ , il suffit d'exhiber la linéarité de la dérivée directionnelle  $dj$  par rapport à celui-ci. Pour cela, nous introduisons dans un premier temps la variable d'état adjointe  $\tilde{y} \in W(0, T)$  qui sera définie par la suite. On écrit ensuite le produit de dualité de l'équation (1.6) avec  $\tilde{y}(t)$  puis on intègre en temps entre 0 et  $T$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t dy(t), \tilde{y}(t) \rangle_{V' \times V} dt + \int_0^T \langle \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy(t), \tilde{y}(t) \rangle_{V' \times V} dt \\ + \int_0^T \langle \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \delta v, \tilde{y}(t) \rangle_{V' \times V} dt = 0 \end{aligned}$$

On intègre par parties la première intégrale afin de reporter la dérivation en temps sur la variable adjointe, puis on fait apparaître les opérateurs adjoints dans les deux autres intégrales. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t \tilde{y}(t) - [\frac{\partial A}{\partial y}]^* \tilde{y}(t), dy(t) \rangle_{V' \times V} dt = \\ \langle \tilde{y}(T), dy(T) \rangle_V - \langle \tilde{y}(0), \delta y_0 \rangle_V + \int_0^T \langle [\frac{\partial A}{\partial v}]^* \tilde{y}(t), \delta v(t) \rangle_{U' \times U} dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

Introduisons alors maintenant le problème adjoint :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donnés } (y_0, v) \in H \times \mathcal{U}_T, T > 0 \text{ et } y \in W(0, T) \text{ solution du} \\ \text{problème (D), trouver } \tilde{y} \in W(0, T) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{y}(t) - [\frac{\partial A}{\partial y}(y(t), v(t))]^* \tilde{y}(t) = C^* \Lambda_{\mathcal{O}}(C y(t) - y^{obs}(t)) \quad \forall t \in ]0, T[ \\ \tilde{y}(T) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Il faut noter que pour résoudre le problème adjoint, il est nécessaire d'intégrer l'équation (1.9) de manière rétrograde en temps. On fait l'hypothèse que le problème adjoint est bien posé :

#### Hypothèse 1.2.4

Étant donnés  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ ,  $T > 0$  et  $y \in W(0, T)$  solution du problème (D), on suppose qu'il existe une unique fonction  $\tilde{y} \in W(0, T)$  solution du problème (A) et que cette solution dépend continûment de  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire que l'application  $\mathcal{K} \rightarrow V : \mathbf{k} \mapsto \tilde{y}(\mathbf{k}; t)$  est continue pour tout  $t \in ]0, T[$ .

En combinant les équations (1.7), (1.8) et (1.9), on parvient à exhiber une dépendance linéaire de la dérivée directionnelle  $\hat{d}j$  par rapport au vecteur de perturbation



$\delta \mathbf{k} = (\delta y_0, \delta v) :$

$$\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta \mathbf{k}) = \langle N(y_0 - y_b) - \tilde{y}(0), \delta y_0 \rangle_H + \int_0^T \langle [\frac{\partial A}{\partial v}]^* \tilde{y}(t), \delta v(t) \rangle_{\mathcal{U}' \times \mathcal{U}} dt .$$

Si  $\tilde{y}$  est solution du problème adjoint (A), on peut alors caractériser formellement les dérivées partielles de la fonction coût par :

$$\frac{\partial j}{\partial y_0}(\mathbf{k}) = -\tilde{y}(0) + N(y_0 - y_b) , \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial j}{\partial v}(\mathbf{k}) = \left[ \frac{\partial A}{\partial v}(y(\mathbf{k}), v) \right]^* \tilde{y}(\mathbf{k}) . \quad (1.11)$$

Pour résumer la démarche, il faut résoudre dans un premier temps le problème direct (D) afin d'obtenir l'état  $y$  du modèle direct. Il faut ensuite résoudre le problème adjoint (A) pour obtenir l'état  $\tilde{y}$  du modèle adjoint. La connaissance de ces deux états permet enfin de calculer simplement toutes les dérivées partielles de la fonction coût à l'aide des formules (1.10) et (1.11).

### 1.2.6 Système d'optimalité

Le principe de l'assimilation variationnelle de données est de trouver la valeur du vecteur de contrôle  $\mathbf{k} = (y_0, v)$  qui minimise la fonction coût  $j(\mathbf{k})$  :

$$(OPT) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Étant donné } T > 0, \text{ trouver } \bar{\mathbf{k}} \in \mathcal{K} \text{ tel que :} \\ j(\bar{\mathbf{k}}) = \min_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} j(\mathbf{k}) \\ \text{sous la contrainte que } y(\bar{\mathbf{k}}) \in W(0, T) \text{ soit solution du problème (D).} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Une condition nécessaire d'optimalité au premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial j}{\partial y_0}(\bar{\mathbf{k}}) = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial v}(\bar{\mathbf{k}}) = 0 . \end{cases}$$

Ainsi, pour satisfaire cette condition d'optimalité, sous la contrainte que la variable  $y$  soit solution du problème direct (D), le système d'optimalité suivant doit être

vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y(t) + A(v(t); y(t)) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ \partial_t \tilde{y}(t) - \left[ \frac{\partial A}{\partial y} \right]^* \tilde{y}(t) = C^* \Lambda_o (C y(t) - y^{obs}(t)) & \forall t \in ]0, T[ \\ y(0) = y_0 & \\ \tilde{y}(T) = 0 & \\ \frac{\partial j}{\partial y_0} = -\tilde{y}(0) + N(y_0 - y_b) = 0 & \\ \frac{\partial j}{\partial v} = \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]^* \tilde{y}(t) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Ce système d'équations regroupe toute l'information disponible sur le système physique modélisé : l'information mathématique portée par le modèle et l'information physique contenue dans les observations. On peut remarquer que ces dernières, introduites par le biais de la fonction coût, apparaissent dans le système d'optimalité uniquement dans le second membre du modèle adjoint. Modifier la fonction coût ne nécessite donc pas de réécrire le modèle adjoint dans sa totalité, mais seulement son second membre.

### 1.2.7 Extensions

Toujours de manière formelle, nous allons maintenant introduire des extensions au modèle général présenté précédemment.

#### Contrôle par les conditions aux limites

Dans cette section, nous considérons le cas où le contrôle du modèle se fait par une variable intervenant dans la définition des conditions aux limites. Soit  $w(t)$  une variable dépendant du temps et appartenant à l'espace  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Gamma)$  défini sur la frontière  $\Gamma$  du domaine. Plus précisément, on définit  $w \in \mathcal{U}_T = L^2(0, T, \mathcal{U})$  et on écrit le modèle direct de la manière suivante :

$$(D_{cl}) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Étant donnés } w \in \mathcal{U}_T \text{ et } T > 0, \text{ trouver } y \in W(0, T) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y(t) + A(y(t)) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ B(w(t), \gamma y(t)) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

où  $B : \mathcal{U} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}'$  est un opérateur différentiel qui décrit les conditions aux limites et  $\gamma$  est l'application trace de l'espace  $V$  sur un espace  $\mathcal{Z}$  défini sur la

frontière  $\Gamma$  du domaine. Un exemple d'un tel opérateur  $B$  est donné ci dessous, pour une frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  :

$$B : (w(t), z(t)) \longmapsto \begin{pmatrix} z|_{\Gamma_1}(t) - w(t) \\ \frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma_2}(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in ]0, T[$$

La fonction coût est définie sur l'espace  $\mathcal{U}_T$  :

$$\begin{aligned} j : \mathcal{U}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto j(w) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C y(w; t) - y^{obs}(t)\|_{\mathcal{O}}^2 dt . \end{aligned}$$

Le problème adjoint se réécrit alors :

$$(A_{cl}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donnés } w \in \mathcal{U}_T, T > 0 \text{ et } y \in W(0, T) \text{ solution du problème (D}_{cl}), \text{ trouver } \tilde{y} \in W(0, T) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{y}(t) - [\frac{\partial A}{\partial y}]^* \tilde{y}(t) = C^* \Lambda_{\mathcal{O}}(C y(t) - y^{obs}(t)) & \forall t \in ]0, T[ \\ [\frac{\partial B}{\partial z}]^* \gamma \tilde{y}(t) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ \tilde{y}(T) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

La dérivée directionnelle de la fonction coût par rapport à  $w$  dans une direction  $\delta w$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$\widehat{dj}(w, \delta w) = \int_0^T \langle [\frac{\partial B}{\partial w}]^* \gamma \tilde{y}(t), \delta w(t) \rangle_{\mathcal{U}' \times \mathcal{U}} dt .$$

Ainsi, la dérivée de  $j$  par rapport à  $w$  s'écrit formellement :

$$\frac{\partial j}{\partial w}(w) = [\frac{\partial B}{\partial w}]^* \gamma \tilde{y} . \quad (1.16)$$

## Contrôle de l'erreur systématique du modèle

Dans la méthode d'assimilation variationnelle de données présentée jusqu'à présent, le modèle impose une contrainte forte sur la solution. Or, aussi sophistiqué soit-il, celui-ci n'est jamais rigoureusement exact lorsque l'on considère des systèmes physiques complexes comme ceux liés aux fluides géophysiques. Par exemple, un certain nombre de phénomènes physiques peuvent ne pas être pris en compte dans la modélisation. Il peut donc être intéressant de relâcher un peu la contrainte sur le modèle en ajoutant dans les équations un terme représentant des incertitudes sur le modèle. Ce terme, que l'on va chercher à identifier, devient alors une variable de contrôle. Cette approche a notamment été développée dans [94, 95].

On se replace dans le cadre général de la section 1.2.2 où un second membre constitué d'un terme d'erreur paramétré par le contrôle  $v \in \mathcal{U}$  est introduit :

$$(D_{\text{em}}) \left\| \begin{array}{l} \text{Étant donnés } \mathbf{k} = (y_0, v) \in H \times \mathcal{U} \text{ et } T > 0, \text{ trouver } y \in W(0, T) \text{ tel} \\ \text{que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t y(t) + A(y(t)) = B v \quad \forall t \in ]0, T[ \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

où  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, V')$  est un opérateur projetant le contrôle dans l'espace d'état sous la forme d'un terme d'erreur systématique. La fonction coût prend en compte une mesure du contrôle comme un terme de pénalisation :

$$j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C y(\mathbf{k}; t) - y^{\text{obs}}(t)\|_{\mathcal{O}}^2 dt + \frac{1}{2} \langle N v, v \rangle_{\mathcal{U}}, \quad (1.18)$$

où  $N$  est un endomorphisme symétrique défini positif de  $\mathcal{U}$ .

On cherche donc à identifier la condition initiale  $y_0$  tout en contrôlant  $v$ . En introduisant le problème adjoint suivant :

$$(A_{\text{em}}) \left\| \begin{array}{l} \text{Étant donnés } \mathbf{k} = (y_0, v) \in H \times \mathcal{U}, T > 0 \text{ et } y \in W(0, T) \text{ solution du} \\ \text{problème } (D_{\text{em}}), \text{ trouver } \tilde{y} \in W(0, T) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{y}(t) - \left[ \frac{\partial A}{\partial y} \right]^* \tilde{y}(t) = C^* \Lambda_{\mathcal{O}} (C y(t) - y^{\text{obs}}(t)) \quad \forall t \in ]0, T[ \\ \tilde{y}(T) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.19)$$

les dérivées partielles de la fonction coût s'écrivent alors formellement en fonction de la variable adjointe :

$$\frac{\partial j}{\partial y_0}(\mathbf{k}) = -\tilde{y}(0), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial j}{\partial v}(\mathbf{k}) = N v - \int_0^T B^* \tilde{y}(t) dt. \quad (1.21)$$

### Couplage faible de modèles

Dans cette section, nous introduisons un modèle général de deux systèmes d'équations faiblement couplés qui servira de cadre pour les modèles de transport présentés ultérieurement.

En complément de la variable d'état  $y \in W(0, T)$ , on considère une grandeur  $\phi(t)$  définie pour tout  $t$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{V}$  et dont l'évolution au cours du temps

est déterminée par une équation faiblement couplée à celle de la variable d'état. Cette loi d'évolution est éventuellement contrôlée par un paramètre  $w \in \mathcal{W}_T$ . Dans ce cas, on redéfinit l'espace de contrôle  $\mathcal{K} = H \times \mathcal{U}_T \times \mathcal{W}_T$ . La variable  $\phi \in \mathcal{V}_T = L^2(0, T; \mathcal{V})$  est définie comme solution du problème suivant :

$$(Tr) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Étant donnés } \mathbf{k} \in \mathcal{K} \text{ et } y(\mathbf{k}) \in W(0, T) \text{ solution du problème (D),} \\ \text{trouver } \phi \in \mathcal{V}_T \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi(t) + G(w(t), y(t); \phi(t)) = 0 \quad \forall t \in ]0, T[ \\ \phi(0) = \phi_0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

où  $G : \mathcal{W} \times V \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  est un opérateur différentiel et  $\phi_0 \in \mathcal{V}$  est la condition initiale pour  $\phi$ .

La valeur de  $\phi$  dépend implicitement de la variable d'état  $y$ . En revanche, l'évolution de  $\phi$  n'a aucune influence sur celle de  $y$ . C'est pourquoi on dit que le système d'équations (1.2)–(1.22) est faiblement couplé. On écrira par la suite  $\phi(y(\mathbf{k}), \mathbf{k})$  pour montrer que  $\phi$  dépend de la variable de contrôle  $\mathbf{k}$  à la fois directement et à travers la variable d'état. Selon le contexte, on écrira plus simplement  $\phi(\mathbf{k})$ .

Dans la suite, on fait une hypothèse sur la continuité des solutions au problème (Tr) par rapport à la variable d'état :

### Hypothèse 1.2.5

Étant donnés  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  et  $y(\mathbf{k}) \in W(0, T)$  solution du problème (D), on suppose qu'il existe une unique fonction  $\phi \in \mathcal{V}_T$  solution du problème (Tr) et que cette solution dépend continûment de  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire que l'application  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{V} : \mathbf{k} \mapsto \phi(\mathbf{k}; t)$  est continue pour tout  $t \in ]0, T[$ .

On fait également une hypothèse sur la différentiabilité de  $\phi$  par rapport à la variable de contrôle :

### Hypothèse 1.2.6

On suppose que l'application  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{V} : \mathbf{k} \mapsto \phi(\mathbf{k}; t)$  est différentiable au sens de Fréchet pour tout  $t \in ]0, T[$ . En particulier, pour tout  $\delta \mathbf{k} \in \mathcal{K}$  et pour tout  $t \in ]0, T[$  on a :

$$\phi(\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}; t) = \phi(\mathbf{k}; t) + D\phi(\mathbf{k}; t) \cdot \delta \mathbf{k} + o(\|\delta \mathbf{k}\|_{\mathcal{K}}) \quad \forall t \in [0, T]$$

où  $D\phi(\mathbf{k}; t) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}}(y(\mathbf{k}; t), \mathbf{k}) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y(\mathbf{k}; t), \mathbf{k}) Dy(\mathbf{k}; t)$  est la différentielle de  $\phi$  par rapport à  $\mathbf{k}$  au temps  $t$ .

Supposons que l'on dispose d'observations  $y^{obs} \in \mathcal{O}$  de la variable d'état  $y$ , ainsi que d'observations  $\phi^{obs}$  de la grandeur  $\phi$  dans l'espace d'observations  $\mathcal{O}_\phi$ . On souhaite

identifier la valeur du vecteur de contrôle qui conduit à une réalisation des variables  $y$  et  $\phi$  qui soit la plus proche possible des observations disponibles. Pour cela, on cherche à minimiser la fonction coût :

$$j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \|Cy(\mathbf{k}; t) - y^{obs}(t)\|_{\mathcal{O}}^2 + \|C_\phi \phi(\mathbf{k}; t) - \phi^{obs}(t)\|_{\mathcal{O}_\phi}^2 \right) dt, \quad (1.23)$$

où le vecteur  $\mathbf{k} = (y_0, v, w)^T$  est un point de l'espace de contrôle,  $C \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O})$  est l'opérateur d'observation introduit dans la partie 1.2.3 et  $C_\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\phi)$  un opérateur d'observation sur la variable  $\phi$ .

Choisissons un vecteur de contrôle  $\mathbf{k}$ , ainsi qu'une perturbation  $\delta\mathbf{k} = (\delta y_0, \delta v, \delta w)^T$ . En adoptant la même notation que dans la partie 1.2.4 pour les dérivées de Gâteaux, c'est-à-dire  $dy = \widehat{dy}(\mathbf{k}; \delta\mathbf{k})$  et  $d\phi = \widehat{d\phi}(\mathbf{k}; \delta\mathbf{k})$ , la dérivée directionnelle de l'équation (1.22) autour du point  $\mathbf{k}$  dans la direction  $\delta\mathbf{k}$  s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t d\phi(t) + \frac{\partial G}{\partial w}(w(t), y(t); \phi(t)) \cdot \delta w(t) \\ \quad + \frac{\partial G}{\partial y}(w(t), y(t); \phi(t)) \cdot dy(t) \\ \quad + \frac{\partial G}{\partial \phi}(w(t), y(t); \phi(t)) \cdot d\phi(t) = 0 \quad \forall t \in ]0, T[ \\ d\phi(0) = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

De même pour la fonction coût, on obtient :

$$\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k}) = \int_0^T \left( \left\langle C^* \Lambda_{\mathcal{O}}(Cy(t) - y^{obs}(t)), dy(t) \right\rangle_{V' \times V} + \left\langle C_\phi^* \Lambda_{\mathcal{O}_\phi}(C_\phi \phi(t) - \phi^{obs}(t)), d\phi(t) \right\rangle_{V' \times \mathcal{V}} \right) dt,$$

où  $\Lambda_\phi$  est l'isomorphisme canonique de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}'$ , espace dual de  $\mathcal{V}$  et  $C_\phi^* \in \mathcal{L}(\mathcal{O}'_\phi, \mathcal{V}')$  l'opérateur adjoint de  $C_\phi$ .

Par la même procédure que dans la partie 1.2.5, à partir des équations linéarisées (1.6) et (1.24), on obtient le problème adjoint couplé suivant :

$$(A_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donnés } \mathbf{k} \in \mathcal{K}, T > 0, y(\mathbf{k}) \in W(0, T) \text{ solution du problème (D)} \\ \text{et } \phi(y) \in \mathcal{V}_T \text{ solution du problème (Tr),} \\ \text{trouver } \widetilde{y} \in W(0, T) \text{ et } \widetilde{\phi} \in \mathcal{V}_T \text{ tels que :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \widetilde{y}(t) - \left[ \frac{\partial A}{\partial y} \right]^* \widetilde{y}(t) - \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \right]^* \widetilde{\phi}(t) = C^* \Lambda_{\mathcal{O}}(Cy(t) - y^{obs}(t)) & \forall t \in ]0, T[ \\ \partial_t \widetilde{\phi}(t) - \left[ \frac{\partial G}{\partial \phi} \right]^* \widetilde{\phi}(t) = C_\phi^* \Lambda_{\mathcal{O}_\phi}(C_\phi \phi(t) - \phi^{obs}(t)) & \forall t \in ]0, T[ \\ \widetilde{y}(T) = 0 \\ \widetilde{\phi}(T) = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Alors, on peut exprimer formellement les dérivées partielles de la fonction coût par rapport aux variables de contrôle en fonction des variables adjointes par :

$$\frac{\partial j}{\partial y_0}(\mathbf{k}) = -\tilde{y}(0) , \quad \frac{\partial j}{\partial v}(\mathbf{k}) = \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]^* \tilde{y} , \quad \frac{\partial j}{\partial w}(\mathbf{k}) = \left[ \frac{\partial G}{\partial w} \right]^* \tilde{\phi} .$$

L'expression des deux premières est semblable à celle correspondant au modèle simple non couplé. Mais la valeur de la variable adjointe  $\tilde{y}$  est différente. Le système d'optimalité au premier ordre s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y(t) + A(v(t); y(t)) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ \partial_t \phi(t) + G(w(t), y(t); \phi(t)) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ y(0) = y_0 \\ \phi(0) = \phi_0 \\ \partial_t \tilde{y}(t) - \left[ \frac{\partial A}{\partial y} \right]^* \tilde{y}(t) - \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \right]^* \tilde{\phi}(t) = C^* \Lambda_o(Cy(t) - y^{obs}(t)) & \forall t \in ]0, T[ \\ \partial_t \tilde{\phi}(t) - \left[ \frac{\partial G}{\partial \phi} \right]^* \tilde{\phi}(t) = C_\phi^* \Lambda_\phi(C_\phi \phi(t) - \phi^{obs}(t)) & \forall t \in ]0, T[ \\ \tilde{\phi}(T) = \tilde{y}(T) = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial y_0} = -\tilde{y}(0) = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial v} = \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]^* \tilde{y}(t) = 0 , \quad \frac{\partial j}{\partial w} = \left[ \frac{\partial G}{\partial w} \right]^* \tilde{\phi}(t) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \end{array} \right. \quad (1.26)$$

## 1.3 Représentation schématique des modèles

Après la présentation dans la partie précédente des modèles direct, linéarisé et adjoint sous forme continue, nous allons en introduire une représentation sous forme de boîtes-opérateurs pour progressivement arriver à une modélisation des programmes informatiques consistante à la fois avec le formalisme présenté précédemment et les notations utilisées par le logiciel de différentiation automatique TAPENADE.

### 1.3.1 Boîtes-opérateurs

Dans cette partie, nous présentons une modélisation par boîtes-opérateurs des problèmes continus. Ainsi, le problème direct (D) peut être considéré comme un opérateur défini sur l'espace des contrôles  $\mathcal{K}$ . Nous allons formaliser cette idée en posant que le résultat de cet opérateur est constitué de la solution  $y \in W(0, T)$  du problème direct, ainsi que de la valeur de la fonction coût. On définit donc

par  $\mathcal{Y} = W(0, T) \times \mathbb{R}^+$  l'espace des résultats et l'on représente le modèle direct par l'opérateur  $\mathcal{M} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{Y}$  qui, à un vecteur de contrôle  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  défini par  $\mathbf{k} = (y_0, v)$ , associe le vecteur de sortie  $Y \in \mathcal{Y}$  défini par  $Y = (y, j)^T$ . Cela s'écrit sous forme compacte de la manière suivante :

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{k}) . \quad (1.27)$$

Une représentation par boîtes de cet opérateur est utile pour faire le lien avec la modélisation des programmes informatiques dans la section suivante. Elle est donnée sur la figure 1.1.

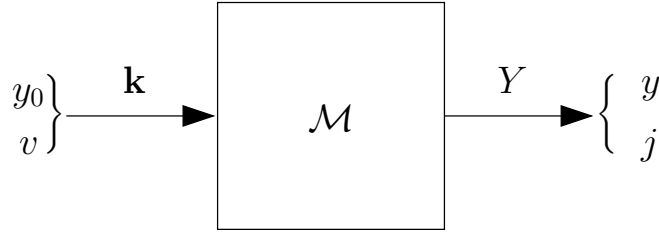


FIG. 1.1 – Représentation schématique du modèle direct.

De la même manière, le modèle linéarisé est représenté par un opérateur  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{Y})$  qui, à un vecteur de perturbation  $\delta \mathbf{k} \in \mathcal{K}$  défini par  $\delta \mathbf{k} = (\delta y_0, \delta v)^T$ , associe le vecteur des dérivées directionnelles  $dY \in \mathcal{Y}$  défini par  $dY = (dy, dj)^T$  :

$$dY = \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) \right) \cdot \delta \mathbf{k} . \quad (1.28)$$

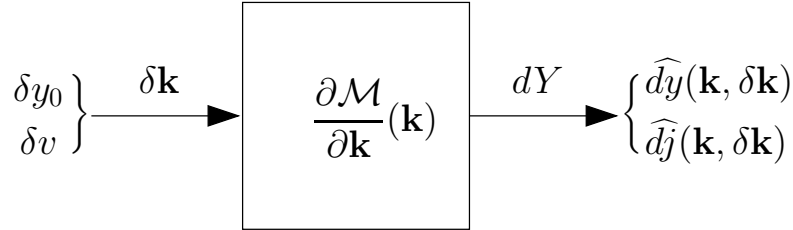


FIG. 1.2 – Représentation schématique du modèle linéarisé.

Par la suite, pour simplifier la présentation, on suppose que les espaces  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des Hilbert que l'on identifie à leurs espaces duaux  $\mathcal{K}'$  et  $\mathcal{Y}'$  grâce au théorème de représentation de Riesz [15]. L'adjoint de l'opérateur  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}}$  est alors l'opérateur  $(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}})^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{K})$ , défini pour tout  $\delta \mathbf{k} \in \mathcal{K}$  et pour tout  $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$  par :

$$\left\langle \tilde{Y}, \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right) \cdot \delta \mathbf{k} \right\rangle_{\mathcal{Y}} = \left\langle \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right)^* \cdot \tilde{Y}, \delta \mathbf{k} \right\rangle_{\mathcal{K}} . \quad (1.29)$$



Il représente le modèle adjoint (1.9) : soit  $\tilde{Y} = (\tilde{y}, \tilde{j})$  un vecteur de l'espace  $\mathcal{Y}$ , on définit la réponse du modèle adjoint  $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{y}_0, \tilde{v})$ , vecteur de l'espace  $\mathcal{K}$  par :

$$\tilde{\mathbf{k}} = \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right)^* \cdot \tilde{Y} . \quad (1.30)$$

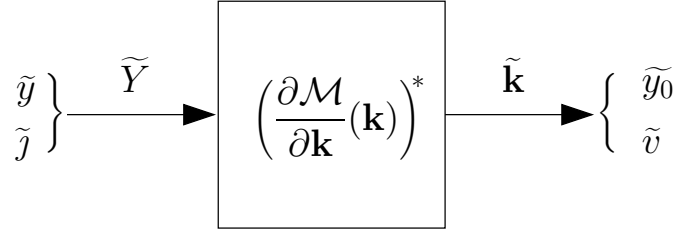


FIG. 1.3 – Représentation schématique du modèle adjoint.

Les figures 1.2 et 1.3 montrent respectivement l'opérateur linéarisé et l'opérateur adjoint sous la forme de boîtes. L'équation (1.29) peut se réécrire de la manière suivante :

$$\langle \tilde{Y}, dY \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle \tilde{\mathbf{k}}, \delta \mathbf{k} \rangle_{\mathcal{K}} . \quad (1.31)$$

En posant  $\tilde{Y} = (0, 1)$ , c'est-à-dire  $\tilde{y} = 0$  et  $\tilde{j} = 1$ , on a :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{dy} \\ \hat{dj} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{Y}} = \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta y_0 \\ \delta v \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}} ,$$

c'est-à-dire :

$$\hat{dj}(\mathbf{k}, \delta \mathbf{k}) = \frac{\partial j}{\partial y_0}(\mathbf{k}) \cdot \delta y_0 + \frac{\partial j}{\partial v}(\mathbf{k}) \cdot \delta v = \langle \tilde{y}_0, \delta y_0 \rangle_H + \langle \tilde{v}, \delta v \rangle_U .$$

En d'autres termes, les composantes  $\tilde{y}_0$  et  $\tilde{v}$  du vecteur réponse  $\tilde{\mathbf{k}}$  du modèle adjoint sont les dérivées partielles de la fonction coût :

$$\frac{\partial j}{\partial y_0}(\mathbf{k}) = \tilde{y}_0 , \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial j}{\partial v}(\mathbf{k}) = \tilde{v} . \quad (1.33)$$

En résumé, pour calculer les dérivées partielles de  $j$  par rapport aux variables de contrôle  $y_0$  et  $v$  au point  $\mathbf{k} = (y_0, v)$ , il faut tout d'abord calculer l'état  $y$  à l'aide du modèle direct puis appliquer le modèle adjoint au vecteur d'entrée  $\tilde{Y} = (0, 1)$ .

### 1.3.2 Programmes informatiques

Nous présentons maintenant une modélisation par boîtes des programmes informatiques, sur le même principe que dans la partie 1.3.1. Ces programmes sont issus de la discrétisation des problèmes direct, linéarisé et adjoint, suivie de leur codage dans un langage de programmation.

Dans le but de résoudre numériquement le problème direct (D), nous construisons un programme informatique qui prend en entrée les variables de contrôle et produit l'état discrétisé ainsi que la valeur de la fonction coût. Ce programme est la mise en œuvre informatique d'une discrétisation de l'opérateur  $\mathcal{M}$  ; nous le représentons par un opérateur noté  $\mathcal{M}_\#$ . Comme le montre la figure 1.4, le programme direct  $\mathcal{M}_\#$  prend en entrée le vecteur des contrôles  $\mathbf{k}_\# = (\mathbf{y}0, \mathbf{v})$  et donne en sortie le vecteur  $\mathbf{Y}_\# = (\mathbf{y}, \mathbf{j})$  où  $\mathbf{y}$  est un vecteur représentant l'état discret du système discrétisé et  $\mathbf{j}$  est la valeur de la fonction coût.

De la même manière, pour résoudre numériquement le problème linéarisé (LT), on construit un programme différentié noté  $\frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#}$  qui est la linéarisation du programme direct  $\mathcal{M}_\#$ . Celui-ci prend en entrée un vecteur de perturbation  $\delta \mathbf{k}_\# = (\mathbf{y}0\mathbf{d}, \mathbf{v}\mathbf{d})$  et donne en sortie le vecteur  $d\mathbf{Y}_\# = (\mathbf{y}\mathbf{d}, \mathbf{j}\mathbf{d})$  des dérivées directionnelles de  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{j}$  dans la direction  $(\mathbf{y}0\mathbf{d}, \mathbf{v}\mathbf{d})$ . Il est représenté de manière schématique sur la figure 1.5.

Enfin, pour résoudre numériquement le problème adjoint (A), on construit un programme adjoint noté  $(\frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#})^T$  qui est l'adjoint du programme différentié  $\frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#}$ . Comme le montre la figure 1.6, le programme adjoint prend en entrée un vecteur  $\tilde{\mathbf{Y}}_\# = (\mathbf{y}\mathbf{b}, \mathbf{j}\mathbf{b})$  et donne en sortie le vecteur  $\tilde{\mathbf{k}}_\#$  dont les composantes sont des variables appelées  $\mathbf{y}0\mathbf{b}$  et  $\mathbf{v}\mathbf{b}$ .

Par extension de ce que l'on a vu dans la section 1.3.1, les variables  $\mathbf{y}0\mathbf{b}$  et  $\mathbf{v}\mathbf{b}$ , sorties du programme adjoint, contiennent la valeur des dérivées partielles de la fonction coût par rapport à  $\mathbf{y}0$  et  $\mathbf{v}$  respectivement si les variables  $\mathbf{y}\mathbf{b}$  et  $\mathbf{j}\mathbf{b}$  ont été initialisées à 0 et 1 respectivement.

### 1.3.3 Écriture du code adjoint

Il existe en pratique trois principales méthodes pour obtenir un code adjoint. La première consiste à discrétiser les équations adjointes continues à l'aide d'un schéma numérique approprié, puis de coder le schéma obtenu. La seconde méthode repose sur l'écriture de l'adjoint du schéma numérique issu de la discrétisation du problème direct (D). Ce schéma adjoint est alors codé pour obtenir un code adjoint. Pour la troisième méthode, on utilise directement le code informatique du programme direct pour produire un code adjoint.

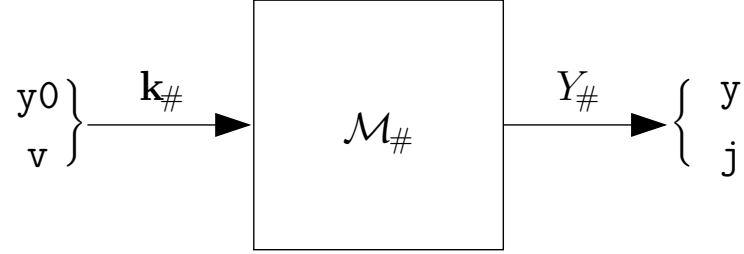


FIG. 1.4 – Représentation schématique du programme direct.

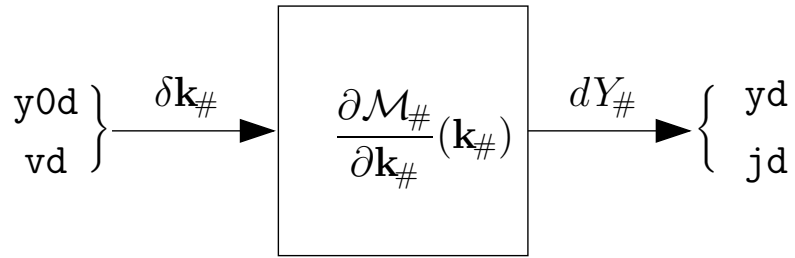


FIG. 1.5 – Représentation schématique du programme linéarisé.

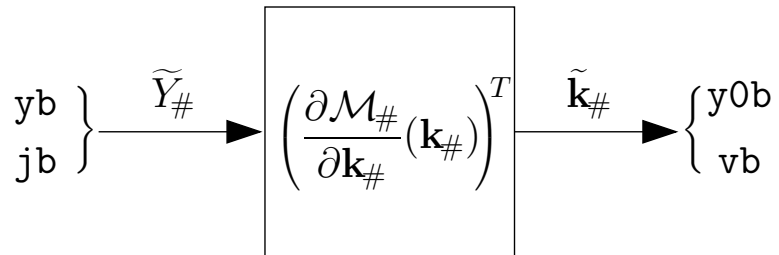


FIG. 1.6 – Représentation schématique du programme adjoint.

Dans les trois cas, ce code adjoint est mis en œuvre dans un programme adjoint pour calculer les dérivées partielles de la fonction coût par rapport aux variables de contrôle.

Par rapport aux deux premières méthodes décrites ici, la troisième présente plusieurs avantages. Le plus important est que le code adjoint produit par différentiation du code direct calcule un gradient exact d'un point de vue arithmétique, aux erreurs de précision de la machine près [21]. De plus, si le code direct est bien préparé, l'utilisation d'un outil de différentiation automatique offre un gain de temps considérable.

Dans la partie suivante, nous présentons le logiciel de différentiation automatique de codes TAPENADE [40] qui, à partir d'un programme direct, peut construire les programmes linéarisé et adjoint correspondants.

## 1.4 Différentiation automatique

La différentiation automatique de code, ou plus précisément la différentiation algorithmique comme le tient à dire A. Griewank [33, 34], produit, à partir d'un code calculant une fonction  $\mathcal{M}$ , un nouveau code qui permettra de calculer ses dérivées de manière exacte, aux erreurs d'arrondi près.

### 1.4.1 Principes de la différentiation automatique

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.3.2, on peut représenter un code informatique par un opérateur  $\mathcal{M}_\# : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui, pour un vecteur de contrôle  $\mathbf{k}_\# \in \mathbb{R}^n$  donné, calcule un vecteur de sortie  $\mathcal{Y}_\# \in \mathbb{R}^m$ . En pratique, un code informatique est une suite d'instructions exécutées les unes à la suite des autres, représentant une suite d'opérations élémentaires sur un ensemble de variables. Dans la suite, on note  $m_k$  une opération élémentaire,  $I_k$  l'instruction informatique correspondante et  $X_{k-1}$  la valeur des variables utilisées à l'étape  $k$ . En incluant le vecteur de contrôle dans l'ensemble des variables du programme ( $\mathbf{k}_\# \subset X_0$ ), on peut écrire :

$$\mathcal{Y}_\# = \mathcal{M}_\#(\mathbf{k}_\#) = m_p(X_{p-1}) \circ m_{p-1}(X_{p-2}) \circ \cdots \circ m_1(X_0) . \quad (1.34)$$

La matrice jacobienne de  $\mathcal{M}_\#$  est alors donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#}(\mathbf{k}_\#) = m'_p(X_{p-1}) \times m'_{p-1}(X_{p-2}) \times \cdots \times m'_1(X_0) , \quad (1.35)$$

où les  $m'_k$  sont les matrices jacobienes des opérations élémentaires  $m_k$ , qui peuvent être traduites en instructions informatiques correspondantes  $I'_k$ .

### Mode tangent

En pratique, la matrice jacobienne (1.35) est souvent trop compliquée à calculer et à stocker en mémoire. Mais on peut néanmoins calculer une dérivée directionnelle qui, pour une direction  $\delta \mathbf{k}_\# \in \mathcal{K}$  de l'espace de contrôle donnée, s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#}(\mathbf{k}_\#) \cdot \delta \mathbf{k}_\# = m'_p(X_{p-1}) \times m'_{p-1}(X_{p-2}) \times \cdots \times m'_1(X_0) \cdot \delta \mathbf{k}_\# . \quad (1.36)$$

Elle est calculée de manière efficace de la droite vers la gauche par de simples produits matrice–vecteur. Ceci peut être codé simplement en insérant les instructions  $I'_k$  dans le code direct original. Cette méthode est appelée différentiation en mode tangent, ou mode direct (*forward mode* en anglais).

### Mode inverse

Cependant, quand on cherche à calculer des gradients, la méthode de différentiation en mode tangent n'est pas appropriée car il faudrait alors calculer autant de dérivées directionnelles que le gradient compte de composantes. La différentiation en mode cotangent, ou mode inverse (*backward mode* en anglais) permet de calculer le produit scalaire entre la jacobienne transposée, c'est-à-dire le programme adjoint, et un vecteur  $\tilde{Y}_\#$  :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#}(\mathbf{k}_\#) \right)^T \cdot \tilde{Y}_\# = m_1'^T(X_0) \times m_2'^T(X_1) \times \cdots \times m_p'^T(X_{p-1}) \cdot \tilde{Y}_\# . \quad (1.37)$$

Cette expression est calculée de manière efficace de la droite vers la gauche, car il s'agit encore de produits matrice–vecteur. Mais cela nécessite cette fois de connaître la valeur des variables  $X_k$  dans le sens *inverse* de leur calcul initial, ce qui pose problème car souvent le programme original réutilise ultérieurement la place mémoire qui leur est allouée. Il faut alors restaurer la valeur des variables au moment opportun, soit en les recalculant, soit en les stockant au moment de leur calcul (voir sur ce point Griewank [33], Hascoët et Pascual [40]).

## 1.4.2 Mise en œuvre de la différentiation automatique

Deux méthodes principales sont utilisées en pratique pour la mise en œuvre de la différentiation automatique : la surcharge d'opérateur et la transformation de source.

La **surcharge d'opérateur** a pour principe de redéfinir toutes les opérations élémentaires représentées dans le code source par les opérateurs (+, −, =, \*, etc.)

ou par des fonctions élémentaires (SIN, COS, POW, *etc.*) de manière à ce qu'elles opèrent à la fois sur la valeur des variables concernées et sur la valeur de leurs différentielles. Cette méthode demande en pratique une modification minimale du code source à différentier et le processus est presque transparent pour l'utilisateur puisque toutes les surcharges sont faites au moment de la compilation. Elle est bien adaptée en théorie au mode tangent mais se révèle en pratique très lente pour le mode inverse. De plus, elle n'est pas adaptable à tous les langages et reste principalement utilisée pour le C/C++.

Dans la méthode de **transformation de source**, le code source original est modifié pour produire un code source différentié effectuant le calcul des dérivées qui sera par la suite compilé séparément. En mode tangent, les instructions différentiées  $I'_k$  sont insérées entre les lignes du code original. En mode inverse, le code adjoint est ajouté à la suite du code original car il a besoin pour commencer de la dernière valeur des variables du direct (voir partie 1.4.1). Un système de restauration de ces variables, soit par recalcul, soit par stockage, soit le plus souvent par un mélange des deux, doit être mis en place.

### Exemple de transformation de source

Nous allons illustrer la différentiation de code par un exemple reposant sur l'opération élémentaire  $a_i = x b_j + \cos(a_i)$ . Le code informatique correspondant peut être écrit en FORTRAN de la manière suivante : `a(i) = x * b(j) + COS(a(i))`. Cette opération élémentaire  $m_k$  transforme donc la valeur initiale  $X_{k-1}$  de l'ensemble des variables en la valeur  $X_k$  :

$$m_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X_{k-1} = \begin{pmatrix} a(i) \\ b(j) \\ x \end{pmatrix} \longmapsto X_k = \begin{pmatrix} a(i) \\ b(j) \\ x \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

La jacobienne de  $m_k$  est la matrice :

$$m'_k(X_{k-1}) = \begin{pmatrix} -\text{SIN}(a(i)) & x & b(j) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On distingue par le suffixe **d** les variables correspondant aux dérivées dans le mode tangent. La dérivée directionnelle  $\delta X_k = m'_k(X_{k-1}) \cdot \delta X_{k-1}$  s'écrit donc sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ad(i) \\ bd(j) \\ xd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{SIN}(a(i)) & x & b(j) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ad(i) \\ bd(j) \\ xd \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

On distingue par le suffixe **b** les variables correspondant aux dérivées dans le mode cotangent. Ainsi, la variable  $\tilde{X}_{k-1} = m_k'^T(X_k) \cdot \tilde{X}_k$  s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \text{ab}(i) \\ \text{bb}(j) \\ \text{xb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{SIN}(\text{a}(i)) & 0 & 0 \\ \text{x} & 1 & 0 \\ \text{b}(j) & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{ab}(i) \\ \text{bb}(j) \\ \text{xb} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

ce qui correspond aux parties de code suivantes :

```
code tangent :  ad(i) = -ad(i)*SIN(a(i)) + x*bd(j) + xd*b(j)

code adjoint :  xb      = xb + b(j)*ab(i)
                  bb(j) = bb(j) + x*ab(i)
                  ab(i) = -SIN(a(i))*ab(i)
```

Les instructions du code adjoint sont exécutées dans l'ordre inverse de celles du code direct. En pratique, les portions de code différentiable sont incluses dans des structures logiques comme des routines (**CALL...**), des boucles (**DO...WHILE**, **DO...ENDDO**), des structures de branchement (**IF/THEN/ELSE/ENDIF**), *etc.* La différentiation du code est alors faite par morceaux. Mais il faut alors enregistrer la *trajectoire* du programme, c'est-à-dire l'ordre de passage dans chaque structure logique, afin de la reprendre en sens inverse pour l'exécution du code adjoint. Cela peut être effectué par le même système de restauration des variables du programme direct évoqué précédemment.

### 1.4.3 Outils de différentiation automatique

Des outils de différentiation automatique de code performants existent depuis le début des années 1990 et font aujourd'hui encore des progrès constants. Parmi les plus importants, on peut noter ADIFOR (Bischof *et al.* [10, 11]) pour le Fortran 77, ADIC (Bischof *et al.* [13]) pour le C ANSI et ADiMat (Bischof *et al.* [12]) pour les programmes écrits en Matlab. Ces outils furent les premiers à fournir des dérivées directionnelles (différentiation en mode tangent) en utilisant la transformation de source pour ces langages de programmation. Une approche différente consistant à intégrer le travail de différentiation au compilateur a été étudiée avec le compilateur NAGWare Fortran 95, dans le but de rendre le processus transparent pour l'utilisateur (Naumann et Riehme [67]).

Pour la différentiation en mode adjoint, tâche beaucoup plus difficile, on peut citer ADOL-C (Griewank [35]) qui fonctionne pour les langages C et C++ par surcharge des opérateurs. Parmi les outils utilisant la transformation de source pour le Fortran 77, les précurseurs furent Odyssée [77] développé à l'INRIA de Sophia-Antipolis et TAMC (Giering et Taminski [28]). Leurs successeurs respectifs,

traitant le Fortran 95, sont Tapenade (Hascoët et Pascual [40]) et TAF (Giering et Taminski [29]).

#### 1.4.4 Présentation de Tapenade

Nous avons utilisé au cours de cette thèse le logiciel TAPENADE [40] de différentiation automatique de codes FORTRAN développé à l'INRIA de Sophia-Antipolis dans le cadre du projet TROPICS <sup>1</sup>.

La version actuelle, numérotée 2.2 au moment de la rédaction de ce manuscrit, traite la totalité du langage FORTRAN 77 et une grande partie du langage FORTRAN 95. Seules deux fonctionnalités de ce dernier ne sont actuellement pas comprises et constituent encore des sujets de recherche dans le domaine de la différentiation automatique : l'allocation dynamique de mémoire et les pointeurs.

#### 1.4.5 Validation du code adjoint

Une fois le programme adjoint obtenu, il s'agit de vérifier s'il est effectivement l'adjoint du programme différentié et s'il calcule correctement le gradient de la fonction coût.

##### Test du produit scalaire

L'objectif du test du produit scalaire est de vérifier si le programme adjoint est bien l'adjoint du programme différentié. Soient  $\delta \mathbf{k}_\# \in \mathcal{K}_\#$  un vecteur de perturbation et  $\tilde{Y}_\# \in \mathcal{Y}_\#$  un vecteur adjoint donnés. De la même manière que l'opérateur adjoint continu est défini par la relation (1.29), le programme adjoint est défini par :

$$\left\langle \tilde{Y}_\#, \left( \frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#} \right) \cdot \delta \mathbf{k}_\# \right\rangle_{\mathcal{Y}_\#} = \left\langle \left( \frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#} \right)^T \cdot \tilde{Y}_\#, \delta \mathbf{k}_\# \right\rangle_{\mathcal{K}_\#} \quad (1.41)$$

Le test du produit scalaire consiste à vérifier que cette relation est bien établie :

- Étant donné  $\delta \mathbf{k}_\# \in \mathcal{K}_\#$ , on calcule avec le programme linéarisé :

$$\delta Y_\# = \left( \frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#} \right) \cdot \delta \mathbf{k}_\# ;$$

- Étant donné  $\tilde{Y}_\# \in \mathcal{Y}_\#$ , on calcule avec le programme adjoint :

$$\tilde{\mathbf{k}}_\# = \left( \frac{\partial \mathcal{M}_\#}{\partial \mathbf{k}_\#} \right)^T \cdot \tilde{Y}_\# ;$$

---

<sup>1</sup>Le logiciel TAPENADE est accessible en ligne à l'adresse <http://tapenade.inria.fr:8080/tapenade/> sous la forme d'une applique JAVA.



- On calcule les produits scalaires :
  - $ps_1 = \left\langle \tilde{Y}_\#, \delta Y_\# \right\rangle_{\mathcal{Y}_\#}$
  - $ps_2 = \left\langle \tilde{\mathbf{k}}_\#, \delta \mathbf{k}_\# \right\rangle_{\mathcal{K}_\#}$
- On vérifie que  $ps_1 = ps_2$ .

### Test du gradient

L'objectif du test du gradient est de vérifier si les composantes du vecteur réponse  $\tilde{\mathbf{k}}_\#$  du programme adjoint correspondent bien aux dérivées partielles de la fonction coût.

Soient  $y_0 \in H$ ,  $v \in \mathcal{U}_T$ . Le développement de Taylor de la fonction coût  $j$  au point  $(y_0, v)$  pour une perturbation  $\alpha \delta y_0 \in H$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ ) s'écrit :

$$j(y_0 + \alpha \delta y_0, v) = j(y_0, v) + \alpha \frac{\partial j}{\partial y_0}(y_0, v) \cdot \delta y_0 + o(\alpha \|\delta y_0\|). \quad (1.42)$$

On définit  $I_\alpha$  par :

$$I_\alpha = \frac{j(y_0 + \alpha \delta y_0, v) - j(y_0, v)}{\alpha \frac{\partial j}{\partial y_0}(y_0, v) \cdot \delta y_0}. \quad (1.43)$$

Cette quantité mesure le rapport entre une approximation par un schéma d'Euler progressif de la dérivée directionnelle de  $j$  dans la direction  $\delta y_0$  et sa valeur effective. D'après la relation (1.42), on a  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha = 1$ . Le test de Taylor consiste à vérifier cette propriété avec le programme adjoint :

- Étant donnés  $\mathbf{y0}$  et  $\mathbf{v}$ , on calcule avec le programme adjoint la dérivée partielle de  $j$  par rapport à  $\mathbf{y0}$  ; il s'agit de la variable  $\mathbf{y0b}$ .
- Avec le programme direct, on calcule  $j(\mathbf{y0}, \mathbf{v})$  la valeur de la fonction coût au point  $(\mathbf{y0}, \mathbf{v})$ .
- Pour  $n = 0, \dots, N$  :
  - On calcule  $\alpha = 2^{-n}$  ;
  - Avec le programme direct, on calcule  $j(\mathbf{y0} + \alpha \mathbf{y0d})$  ;
  - On calcule  $I_\alpha$  .
- On vérifie que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha = 1$ .

Sur la figure 1.7 est représenté le résultat d'un test du gradient. La valeur absolue de la quantité  $|I_\alpha - 1|$  est tracée en fonction de  $\alpha$  dans un repère log-log. La tendance générale montre une décroissance de la fonction quand  $\alpha$  diminue. Dans la zone où la valeur de  $\alpha$  est comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^{-7}$ , on observe que cette décroissance est linéaire et que la pente est sensiblement égale à 1. Cela rappelle

le fait que l'erreur de troncature du schéma aux différences finies est d'ordre 1. Lorsque  $\alpha < 10^{-7}$ , ce comportement n'est plus vérifié car les erreurs d'arrondi deviennent prépondérantes.

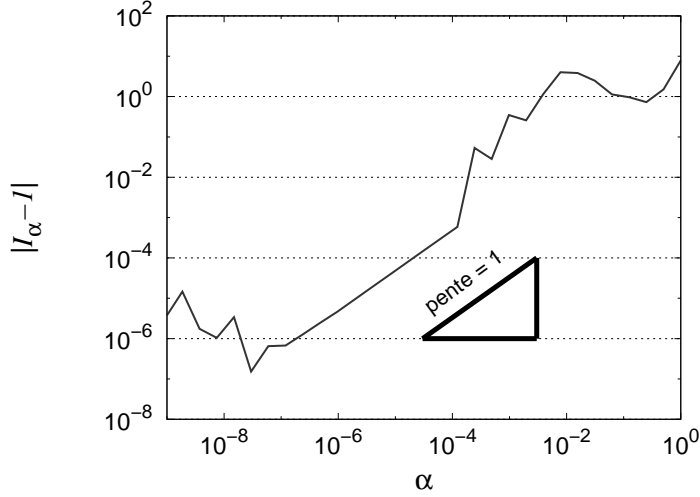


FIG. 1.7 – Test du gradient : évolution de la quantité  $|I_\alpha - I|$  en fonction de la valeur du coefficient  $\alpha$  dans un repère log-log.

On peut vérifier de la même manière que le programme adjoint calcule correctement les dérivées partielles de  $j$  par rapport à chaque variable de contrôle.

## 1.5 Algorithme de minimisation

Dans le cadre de cette thèse, la minimisation de la fonction coût est effectuée en pratique grâce au module d'optimisation M1QN3 développé par Gilbert et Lemaréchal [30]. Ce module utilise une méthode Quasi-Newton à mémoire limitée reposant sur la formule BFGS pour la mise à jour de l'approximation de la Hessienne. Il est adapté pour la résolution de problèmes de minimisation de grande taille sans contrainte de la forme :

$$\text{Trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad \bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} j(x) ,$$

où la fonction  $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est supposée continûment différentiable. La présentation qui suit est inspirée de [30] et du manuel d'utilisation du module M1QN3 [31].

### 1.5.1 Algorithme de Quasi-Newton

Un algorithme de Quasi-Newton est un algorithme de descente, donc itératif, calculant des approximations successives  $\{x^k\}_k$  de la valeur optimale  $\bar{x}$  à partir d'une estimation initiale  $x^0$  :

$$\begin{cases} x^0 & \text{donné} \\ x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k & \text{pour } k = 0, \dots \end{cases} \quad (1.44)$$

où à l'étape  $k$ , le vecteur  $d^k \in \mathbb{R}$  est une direction de descente et  $\alpha^k$  un pas de descente. Par définition,  $d^k$  vérifie l'inégalité  $\langle \nabla j(x^k), d^k \rangle < 0$ , ce qui assure, si  $j$  n'est pas constante localement, qu'il existe un réel  $\alpha$  positif tel que  $j(x^k + \alpha d^k)$  soit inférieur à  $j(x^k)$ . La détermination d'un pas de descente  $\alpha^k$  vérifiant cette propriété est effectuée par un algorithme de recherche linéaire.

Dans la méthode de Newton, la direction de descente  $d^k$  est calculée par :

$$d^k = - [\nabla^2 j(x^k)]^{-1} \cdot \nabla j(x^k) ,$$

ce qui, en plus du calcul du gradient de la fonction coût à minimiser, nécessite le calcul de l'inverse de sa Hessienne, chose impossible à mettre en œuvre à un coût raisonnable pour des problèmes de grandes dimensions. Pour cette raison, la méthode de Quasi-Newton calcule la direction de descente de la manière suivante :

$$d^k = - W^k \cdot \nabla j(x^k) , \quad (1.45)$$

où  $W^k$  est une matrice symétrique définie positive, approximation à l'étape  $k$  de l'inverse de la Hessienne de  $j$  au point  $x^k$ .

### 1.5.2 Approximation de l'inverse de la Hessienne

Les matrices  $W^k$  sont générées par mises à jour successives reposant sur la formule BFGS inverse qui a l'avantage de n'utiliser que les gradients de  $j$ . Avant de présenter la méthode, introduisons les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  suivants :

$$s^i = x^{i+1} - x^i \quad \text{et} \quad y^i = \nabla j(x^{i+1}) - \nabla j(x^i) \quad \text{pour } i \geq 0 .$$

La mise à jour BFGS inverse est alors définie en fonction d'une matrice  $W$  et d'un couple de vecteurs  $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par l'opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\overline{\text{BFGS}}(W, y, s) = \left( I - \frac{s \otimes y}{\langle y, s \rangle} \right) W \left( I - \frac{y \otimes s}{\langle y, s \rangle} \right) + \frac{s \otimes s}{\langle y, s \rangle} , \quad (1.46)$$

où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel de deux vecteurs. Appliquée à une matrice carrée de taille  $n$ , cette mise à jour a la propriété de préserver la symétrie dans tous les cas, ainsi que la positivité si et seulement si  $\langle y, s \rangle > 0$ .

À chaque itération de l'algorithme de minimisation, l'approximation  $W^k$  de la Hessienne inverse de  $j$  est déterminée par l'algorithme suivant utilisant la formule (1.46) :

$$\begin{cases} W^{k,(0)} &= D^k \\ W^{k,(i+1)} &= \overline{\text{BFGS}}\left(W^{k,(i)}, y^i, s^i\right) \quad \text{pour } i = 0, \dots, k-1 \\ W^k &= W^{k,(k)} \end{cases} \quad (1.47)$$

où  $D^k$  est une matrice positive définie diagonale  $D^k = \text{diag}(\{D_j^k\}_{j=1,\dots,n})$  calculée de manière itérative. On a  $D^0 = I$ , puis les composantes de  $D^{k+1}$  sont données par :

$$D_j^{k+1} = \left( \frac{\langle D^k y^k, y^k \rangle}{\langle y^k, s^k \rangle D_j^k} + \frac{\langle y^k, e_j \rangle^2}{\langle y^k, s^k \rangle} - \frac{\langle D^k y^k, y^k \rangle \langle s^k, e_j \rangle^2}{\langle y^k, s^k \rangle \langle (D^k)^{-1} s^k, s^k \rangle (D_j^k)^2} \right)^{-1}$$

en notant  $e_j$  le  $j^{\text{e}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

En pratique, on ne stocke pas la matrice  $W^k$  complètement en mémoire, mais seulement les paires de vecteurs  $(y^i, s^i)$  à partir desquelles elle peut être reconstruite. Comme le module M1QN3 est en fait basé sur une méthode de Quasi-Newton à mémoire limitée, seules les  $m$  dernières paires de vecteurs sont stockées à chaque itération  $k$ , c'est à dire l'ensemble :

$$\{(y^i, s^i) : k - m \leq i \leq k - 1\} .$$

Par conséquent, lorsque  $k \geq m+1$ , l'algorithme (1.47) de calcul de  $W^k$  est remplacé par le suivant qui ne prend en compte que les vecteurs sauvegardés :

$$\begin{cases} W^{k,(0)} &= D^k \\ W^{k,(i+1)} &= \overline{\text{BFGS}}\left(W^{k,(i)}, y^{k-m+i}, s^{k-m+i}\right) \quad \text{pour } i = 0, \dots, m-1 \\ W^k &= W^{k,(m)} . \end{cases} \quad (1.48)$$

### 1.5.3 Calcul du pas de descente

La détermination d'un pas de descente  $\alpha^k$  est effectuée dans le module M1QN3 par une méthode de recherche linéaire de manière à vérifier les deux conditions de Wolfe suivantes :

$$\begin{aligned} j(x^k + \alpha^k d^k) &\leq j(x^k) + \omega^1 \alpha^k \langle \nabla j(x^k), d^k \rangle \\ \langle \nabla j(x^k + \alpha^k d^k), d^k \rangle &\geq \omega^2 \langle \nabla j(x^k), d^k \rangle \end{aligned}$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux scalaires qui doivent vérifier  $0 < \omega_1 < \frac{1}{2}$  et  $\omega_1 < \omega_2 < 1$ . En pratique, ils sont fixés à  $\omega_1 = 10^{-4}$  et  $\omega_2 = 0.99$ .

#### 1.5.4 Critère d'arrêt de l'algorithme

Le processus itératif (1.44) s'arrête lorsque la norme du gradient a été divisée par une certaine quantité fixée à l'avance, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{\|\nabla j(x^k)\|}{\|\nabla j(x^0)\|} \leq \varepsilon .$$

où  $\varepsilon$  est un seuil que l'on choisira dans cette thèse de l'ordre de  $10^{-5}$ . En pratique, ce test est renforcé en fixant un nombre maximal d'itérations afin d'empêcher des temps de calcul trop importants.



## Chapitre 2

# Modèle Saint-Venant pour l'hydraulique fluviale

Ce chapitre est consacré à la présentation du modèle d'écoulement qui sert de support aux expériences numériques réalisées au cours de cette thèse. Nous introduisons dans une première partie les équations de Saint-Venant sur lesquelles est basé le modèle, puis nous présentons la dérivation des équations adjointes. Dans une troisième partie, nous décrivons le schéma numérique utilisé pour la discrétisation du modèle direct, reposant sur la méthode des volumes finis. Finalement, nous présentons le logiciel Dassflow écrit au cours de cette thèse qui est la mise en œuvre des modèles direct et adjoint pour la réalisation d'expériences numériques d'assimilation de données.

### 2.1 Le modèle Saint-Venant

Le modèle d'écoulement utilisé dans le cadre de ce travail de thèse est basé sur les équations de Saint-Venant. Ces équations aux dérivées partielles ont été introduites initialement en 1871 par l'ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Barré de Saint-Venant [81] et tiennent aujourd'hui encore un rôle important pour la modélisation des écoulements à surface libre en eaux peu profondes — d'où leur nom anglais d'équations *shallow water* —, notamment en hydraulique maritime et fluviale. Elles forment un système d'équations à deux dimensions d'espace dans le plan horizontal et découlent de l'intégration verticale des équations de Navier-Stokes incompressibles tridimensionnelles en posant différentes hypothèses simplificatrices sur l'écoulement.

### 2.1.1 Dérivation des équations de Saint-Venant

Une présentation détaillée et rigoureuse de la dérivation des équations de Saint-Venant est donnée dans le cours d'Olivier Thual à l'INPT [90]. Dans la présentation qui en est faite ici, nous nous contenterons dans un premier temps d'énoncer les principales hypothèses faites sur le fluide en mouvement et sur la configuration hydraulique pour les écoulements considérés, puis nous présenterons les grandes étapes de la procédure.

Les équations de Navier–Stokes tridimensionnelles avec gravité pour un fluide newtonien incompressible comme l'eau peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_x \tilde{u} + \partial_y \tilde{v} + \partial_z \tilde{w} = 0 \\ \partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \partial_x \tilde{u} + \tilde{v} \partial_y \tilde{u} + \tilde{w} \partial_z \tilde{u} + \frac{1}{\rho} \partial_x p - \nu \Delta u = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + \tilde{u} \partial_x \tilde{v} + \tilde{v} \partial_y \tilde{v} + \tilde{w} \partial_z \tilde{v} + \frac{1}{\rho} \partial_y p - \nu \Delta v = 0 \\ \partial_t \tilde{w} + \tilde{u} \partial_x \tilde{w} + \tilde{v} \partial_y \tilde{w} + \tilde{w} \partial_z \tilde{w} + \frac{1}{\rho} \partial_z p - \nu \Delta w = -g \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  et  $\tilde{w}$  sont les trois composantes de la vitesse,  $p$  est la pression qui s'exerce sur le fluide,  $\rho$  est sa masse volumique exprimée en  $kg/m^3$ ,  $g$  est l'accélération de la pesanteur (environ  $9.81 m/s^2$ ) et  $\nu$  est la viscosité cinématique de l'eau qui est de l'ordre de  $10^{-6} m^2/s$ .

On considère un écoulement dont la hauteur d'eau peut être exprimée en tout point du plan horizontal comme une fonction du temps  $h(x, y, t)$ , comme représenté sur la figure 2.1. Cela exclut par exemple le déferlement. On note également  $z_s(x, y, t)$  le niveau de la surface libre,  $z_b(x, y)$  l'élévation du fond que l'on suppose stable dans le temps. Ainsi, la hauteur d'eau s'écrit  $h(x, y, t) = z_s(x, y, t) - z_b(x, y)$ .

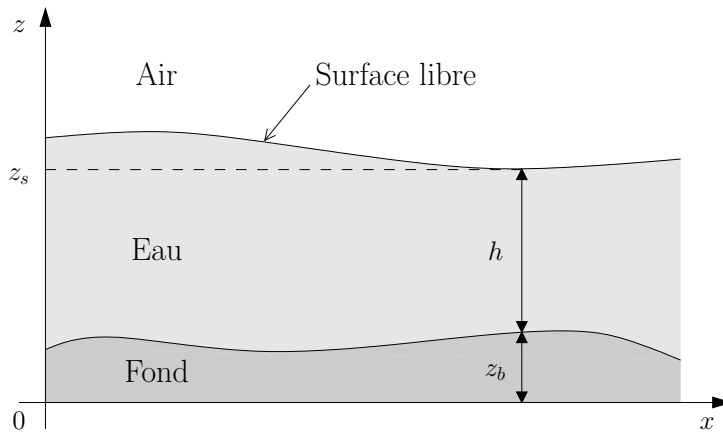


FIG. 2.1 – Coupe verticale du domaine fluide d'un tronçon de rivière.



La première hypothèse sur l'écoulement porte sur son rapport d'aspect  $\varepsilon$ . Comme on s'intéresse à des écoulements en eau peu profonde, on suppose que la dimension caractéristique  $h_0$  de la hauteur d'eau est petite devant la dimension  $L_0$  d'espace horizontale. On a  $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0} \ll 1$ .

La seconde hypothèse concerne le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses. Si  $U_0$  est la vitesse caractéristique de l'écoulement, le nombre de Reynolds est défini par  $Re = \frac{h_0 U_0}{\nu}$ . On suppose alors que l'inverse de ce nombre sans dimension est petit devant le rapport d'aspect :  $\frac{1}{Re} \ll \varepsilon$ . Combiné à la première hypothèse, cela revient à négliger l'effet de la viscosité sur l'écoulement.

Par ailleurs, le nombre de Froude mesure le rapport entre les forces liées à la vitesse et la force de pesanteur. On note  $Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}$ . On se place dans le cas où ce nombre est de l'ordre de l'unité. Si ce nombre est inférieur à 1, l'écoulement est dit sous-critique, s'il est supérieur à 1, l'écoulement est dit super-critique.

Des deux hypothèses sur le rapport d'aspect  $\varepsilon$  et sur la grandeur du nombre de Reynolds découle le fait que la pression  $p$  exercée sur le fluide correspond à la **pression hydrostatique**. Dans les équations de Navier-Stokes (2.1), l'accélération verticale due au gradient de pression est équilibrée avec la force de gravité et la quatrième équation du système se réduit à :  $\frac{1}{\rho} \partial_z p = -g$ . Cela signifie que toutes les autres forces dans la direction verticale sont négligées et qu'en tout point du domaine fluide, la pression est donnée par  $p(x, y, z, t) = p_{atm}(x, y, t) + \rho g(z_s(x, y, t) - z)$  où  $p_{atm}$  est la pression atmosphérique à la surface de l'eau, que l'on supposera constante en espace et en temps.

En réalité, la restriction sur la forme de la surface libre introduite au début de cette partie (absence de déferlement) est liée à la condition de pression hydrostatique. Avec toutes ces hypothèses, le système d'équation (2.1) se réduit au suivant :

$$\begin{cases} \partial_x \tilde{u} + \partial_y \tilde{v} + \partial_z \tilde{w} = 0 \\ \partial_t \tilde{u} + \partial_x(\tilde{u}\tilde{u}) + \partial_y(\tilde{u}\tilde{v}) + \partial_z(\tilde{u}\tilde{w}) + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + \partial_x(\tilde{u}\tilde{v}) + \partial_y(\tilde{v}\tilde{v}) + \partial_z(\tilde{v}\tilde{w}) + \frac{1}{\rho} \partial_y p = 0 \\ \frac{1}{\rho} \partial_z p = -g \end{cases} \quad (2.2)$$

Par ailleurs, on suppose que la surface libre et le fond sont imperméables. Une particule fluide de la surface libre reste attachée à la surface au cours du temps et l'hypothèse similaire est faite pour le fond. Cela nous donne deux conditions aux limites pour le système (2.2) : en notant  $\tilde{u}^s$ ,  $\tilde{v}^s$  et  $\tilde{w}^s$  les composantes de la vitesse d'une particule fluide fixée à la surface libre et  $\tilde{u}^b$ ,  $\tilde{v}^b$  et  $\tilde{w}^b$  celles d'une particule fluide fixée au fond, ces conditions d'imperméabilité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t z_s + \tilde{u}^s \partial_x z_s + \tilde{v}^s \partial_y z_s - \tilde{w}^s &= 0 \\ \partial_t z_b + \tilde{u}^b \partial_x z_b + \tilde{v}^b \partial_y z_b - \tilde{w}^b &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, pour obtenir les équations de Saint-Venant, on procède à l'intégration sur la verticale, entre les cotes  $z_b(x, y)$  et  $z_s(x, y, t)$  de chaque équation du système (2.2). Cette opération fait apparaître les variables  $u$  et  $v$  qui correspondent aux deux composantes de la vitesse moyennée sur la verticale. On a en particulier :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{h(x, y, t)} \int_{z_b(x, y)}^{z_s(x, y, t)} \tilde{u}(x, y, z, t) dz .$$

En faisant l'hypothèse, compatible avec l'absence de viscosité du fluide, que la vitesse est constante sur une colonne verticale, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) & \forall z \in [z_b(x, y), z_s(x, y, t)] , \\ \tilde{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) & \forall z \in [z_b(x, y), z_s(x, y, t)] , \end{aligned}$$

alors les termes non-linéaires dans (2.2) se simplifient comme fonctions des quantités  $u$  et  $v$  seules et on arrive finalement à une formulation conservative des équations de Saint-Venant bidimensionnelles non-visqueuses :

$$(SV) \quad \begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(huu) + \partial_y(huv) + gh\partial_x z_s = 0 \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hvv) + gh\partial_y z_s = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Les inconnues  $h$ ,  $u$  et  $v$  sont des fonctions des variables d'espaces horizontales  $x$  et  $y$  ainsi que du temps  $t$ .

Pour des écoulements réalistes, il est cependant nécessaire de prendre en compte l'effet des forces de friction sur le fond, qui sont liées à la viscosité négligée ici. Ceci va être fait dans la partie suivante par l'introduction d'un terme de frottement sur le fond. Une forme visqueuse des équations de Saint-Venant a été proposée de manière rigoureuse dans [26].

### 2.1.2 Équations de Saint-Venant pour l'hydraulique fluviale

Nous allons maintenant présenter les équations de Saint-Venant bidimensionnelles sous la forme qui va servir dans la suite de ce travail, et en particulier pour leur mise en œuvre numérique dans le logiciel Dassflow. On reprend la notation du paragraphe précédent en définissant en chaque point du domaine spatial  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  la hauteur d'eau  $h$  et on introduit le vecteur  $\mathbf{u} = (u, v)^T$  des vitesses moyennées sur la verticale. On définit également le débit local de l'écoulement  $\mathbf{q} = h\mathbf{u}$ . Ainsi,

les équations de Saint-Venant avec friction peuvent s'écrire sous forme compacte :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{q} + \operatorname{div}(\frac{1}{h}\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + \frac{1}{2}g\nabla h^2 + gh\nabla z_b + g\frac{n^2\|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}}\mathbf{q} = 0 \\ h(0) = h^0, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $g$  est l'intensité de la force de pesanteur,  $z_b$  l'élévation du fond,  $n$  est le coefficient de Manning qui paramètre la loi de frottement représentée par le dernier terme dans la seconde équation. Les variables  $h^0$  et  $\mathbf{q}^0$  sont les conditions initiales sur la hauteur et le débit.

### 2.1.3 Conditions aux limites

Pour la définition des conditions aux limites, on divise le bord  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  en quatre types distincts, selon les conditions qui y sont appliquées :  $\Gamma = \Gamma_q \cup \Gamma_z \cup \Gamma_t \cup \Gamma_w$ . Les bords de type  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma_z$  et  $\Gamma_t$  correspondent à des interfaces fluide–fluide, c'est-à-dire à des frontières ouvertes, tandis que les bords de type  $\Gamma_w$  correspondent à des frontières fluide–solide, des murs. Pour résumer, on impose :

- sur  $\Gamma_q$ , un débit scalaire  $\bar{q}$  ;
- sur  $\Gamma_z$ , un niveau de surface libre  $\bar{z}_s$  ;
- sur  $\Gamma_t$ , des conditions de Neumann homogènes pour toutes les variables d'état ;
- sur  $\Gamma_w$ , une condition d'imperméabilité pour la vitesse.

Sur les bords de type  $\Gamma_q$  et  $\Gamma_w$ , une condition de Neumann homogène est imposée sur la hauteur d'eau  $h$ . Il n'est possible de définir un bord de type  $\Gamma_z$  que dans le cas où l'écoulement est en régime fluvial, ou sous-critique, c'est-à-dire lorsque  $\|\mathbf{u}\| < \sqrt{gh}$ . On se situe alors dans le cas où la caractéristique entrante correspond à une onde de raréfaction et on impose que l'invariant de Riemann correspondant soit constant le long de cette caractéristique [92, p. 50]. En régime super-critique, lorsque l'écoulement est sortant, les bords de type  $\Gamma_z$  sont remplacés par des bords de type  $\Gamma_t$  et des conditions de Neumann sont imposées sur toutes les variables. Le cas d'un écoulement super-critique entrant dans le domaine n'est pas traité.

Les conditions aux limites complètes appliquées aux différents types de bords sont résumées dans le tableau suivant :

$$(C.L.) \quad \begin{cases} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_q} = -\bar{q}, & (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_w} = 0, & (\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{q})|_{\Gamma_t} = 0, \\ (\partial_{\mathbf{n}} h)|_{\Gamma_q \cup \Gamma_w \cup \Gamma_t} = 0, & h|_{\Gamma_z} = \bar{z}_s - z_b|_{\Gamma_z}, & \partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + 2c)|_{\Gamma_z} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où la variable  $c = \sqrt{gh}$  désigne la célérité des ondes longues.

## 2.2 Dérivation des équations adjointes

Dans cette partie, nous allons écrire la dérivation des équations adjointes de notre modèle d'écoulement basé sur les équations de Saint-Venant, en suivant la démarche présentée dans le cadre général de la partie 1.2. Les variables qui contrôlent le système d'équations (2.4)–(2.5) sont les conditions initiales  $h^0$  et  $\mathbf{q}^0$ , l'élévation du fond  $z_b$ , le coefficient de Manning  $n$ , ainsi que les valeurs des conditions aux limites pour le débit  $\bar{q}$  et le niveau de surface libre  $\bar{z}_s$ . Nous allons donc considérer le vecteur de contrôle complet  $\mathbf{k} = (h^0, \mathbf{q}^0, z_b, n, \bar{q}, \bar{z}_s)^T$ .

### 2.2.1 Fonction coût

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.2.6, le contenu de la fonction coût n'apparaît dans le système d'optimalité que dans le second membre du modèle adjoint. Par conséquent, on peut modifier cette fonction coût sans avoir à réécrire complètement le modèle adjoint. Nous allons donc dans cette partie utiliser une fonction coût générique prenant en compte des observations de hauteur d'eau  $h^{obs}$  et des observations de débit  $\mathbf{q}^{obs}$ , denses sur le domaine  $\Omega$  et continues en temps. On introduit donc :

$$j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \|C_h h(t) - h^{obs}(t)\|_{\mathcal{O}_h}^2 + \|C_q \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^{obs}(t)\|_{\mathcal{O}_q}^2 \right) dt + \frac{\alpha_p}{2} \|D z_b\|_D^2 \quad (2.6)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_h}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_q}$  sont des normes respectivement sur les espaces d'observation des hauteurs d'eau et des débits. On suppose que ces derniers sont des espaces de Hilbert et l'on peut définir ces normes par le produit scalaire associé en prenant éventuellement en compte les covariances d'erreur sur les observations. Par exemple :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{O}_h}^2 = \langle R^{-1} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}_h}$$

où  $R$  est une matrice de covariance symétrique définie positive. Dans la suite, cependant, nous n'introduirons pas d'information sur les erreurs d'observation dans les fonctions coût et nous prendrons donc la matrice  $R$  égale à l'identité. Les opérateurs  $C_h$  et  $C_q$  sont les opérateurs d'observation qui projettent les variables  $h$  et  $\mathbf{q}$  respectivement dans les espaces d'observations  $\mathcal{O}_h$  et  $\mathcal{O}_q$ . Pour plus de lisibilité, nous utiliserons par la suite la norme  $\|\cdot\|_\Omega$ , issue du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  à la place des normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_h}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_q}$ .

Le dernier terme, donné à titre d'exemple, introduit une régularisation [91] sur la variable  $z_b$  : l'opérateur  $D$  est un opérateur différentiel et  $\|\cdot\|_D$  est une norme dans l'espace image de cet opérateur.

### 2.2.2 Modèle linéarisé

Comme nous l'avions fait dans le cadre général du chapitre précédent dans la partie 1.2.4, on écrit la dérivée de Gâteaux du modèle (2.4)–(2.5) en un point donné  $\mathbf{k}$  de l'espace de contrôle et pour une direction  $\delta\mathbf{k} = (\delta h^0, \delta\mathbf{k}^0, \delta z_b, \delta n, \delta\bar{q}, \delta\bar{z}_s)^T$ . Les variables d'état du modèle linéarisé sont les dérivées de Gâteaux  $\widehat{dh}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k})$  et  $\widehat{d\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k})$  de la hauteur et du débit, que l'on notera plus simplement  $dh$  et  $d\mathbf{q}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t dh + \operatorname{div}(d\mathbf{q}) = 0 \\ \partial_t d\mathbf{q} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{h}(d\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes d\mathbf{q})\right) - \operatorname{div}\left(\frac{dh}{h^2} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\right) \\ \quad + g \nabla(h dh) + g \nabla z_b dh + gh \nabla(\delta z_b) + 2gn \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} \mathbf{q} \delta n \\ \quad + g \frac{n^2}{h^{7/3}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} d\mathbf{q} + \|\mathbf{q}\| d\mathbf{q} \right) - \frac{7}{3} g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} \mathbf{q} dh = 0 \\ \text{C.I.} \quad dh(0) = \delta h^0, \quad d\mathbf{q}(0) = \delta\mathbf{q}^0. \\ \text{C.L.} \quad (d\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_q} = -\delta\bar{q}, \quad (d\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_w} = 0, \\ \quad (\partial_{\mathbf{n}} d\mathbf{q})|_{\Gamma_t} = 0, \quad (\partial_{\mathbf{n}} dh)|_{\Gamma_q \cup \Gamma_w \cup \Gamma_t} = 0, \\ \quad dh|_{\Gamma_z} = \delta\bar{z}_s, \quad \partial_{\mathbf{n}}(d\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \sqrt{\frac{g}{h}} dh)|_{\Gamma_z} = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

De la même manière, on écrit la dérivée de Gâteaux de la fonction coût (2.6) au point  $\mathbf{k}$  et dans la direction  $\delta\mathbf{k}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta\mathbf{k}) = & \int_0^T \left( \left\langle C_h^T (C_h h(t) - h^{obs}(t)), dh(t) \right\rangle_{\Omega} \right. \\ & + \left\langle C_{\mathbf{q}}^T (C_{\mathbf{q}} \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^{obs}(t)), d\mathbf{q}(t) \right\rangle_{\Omega} \Big) dt \\ & + \alpha_p \langle D^T D z_b, \delta z_b \rangle_D. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Dérivation des équations adjointes

L'objectif est d'exprimer la linéarité de la dérivée de Gâteaux (2.8) de la fonction coût par rapport aux différentes variables de contrôle du modèle. En reprenant la démarche adoptée dans la partie 1.2.5, on écrit le produit scalaire de l'équation (2.7) par un vecteur  $(\tilde{h}, \tilde{\mathbf{q}})^T$  de variables dites adjointes et l'on intègre le

résultat en temps entre 0 et  $T$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \partial_t dh + \operatorname{div}(d\mathbf{q}), \tilde{h} \right\rangle_\Omega + \int_0^T \left\langle \partial_t d\mathbf{q} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{h} (d\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes d\mathbf{q}) \right), \tilde{\mathbf{q}} \right\rangle_\Omega \\ & + \int_0^T \left\langle -\operatorname{div} \left( \frac{dh}{h^2} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \right) + g \nabla(h dh) + g \nabla z_b dh + gh \nabla \delta z_b + 2gn \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} \mathbf{q} \delta n, \tilde{\mathbf{q}} \right\rangle_\Omega \\ & + \int_0^T \left\langle g \frac{n^2}{h^{7/3}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} d\mathbf{q} + \|\mathbf{q}\| d\mathbf{q} \right) - \frac{7}{3} g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} \mathbf{q} dh, \tilde{\mathbf{q}} \right\rangle_\Omega = 0 . \end{aligned}$$

Ensuite, on effectue des intégrations par parties suivies de la transposition des opérateurs de gradient et de divergence pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left\langle dh(T), \tilde{h}(T) \right\rangle_\Omega - \left\langle dh(0), \tilde{h}(0) \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \partial_t \tilde{h}, dh \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \nabla \tilde{h}, d\mathbf{q} \right\rangle_\Omega + \int_0^T \left\langle \tilde{h}, d\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\partial\Omega} \\ & + \left\langle d\mathbf{q}(T), \tilde{\mathbf{q}}(T) \right\rangle_\Omega - \left\langle d\mathbf{q}(0), \tilde{\mathbf{q}}(0) \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \partial_t \tilde{\mathbf{q}}, d\mathbf{q} \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \frac{1}{h} (\mathbf{q} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{q}}, d\mathbf{q} \right\rangle_\Omega \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{1}{h} (\nabla \tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{q}, d\mathbf{q} \right\rangle_\Omega + \int_0^T \left\langle \frac{1}{h} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{h} (\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{n}, d\mathbf{q} \right\rangle_{\partial\Omega} \\ & + \int_0^T \left\langle \frac{1}{h^2} [(\mathbf{q} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{q}}] \cdot \mathbf{q}, dh \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \frac{1}{h^2} (\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{q}}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}), dh \right\rangle_{\partial\Omega} - \int_0^T \left\langle gh \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{q}}), dh \right\rangle_\Omega \\ & + \int_0^T \left\langle gh(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}), dh \right\rangle_{\partial\Omega} + \int_0^T \left\langle g \tilde{\mathbf{q}} \cdot \nabla z_b, dh \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \operatorname{div}(gh \tilde{\mathbf{q}}), \delta z_b \right\rangle_\Omega \\ & + \int_0^T \left\langle gh(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}), \delta z_b \right\rangle_{\partial\Omega} + \int_0^T \left\langle 2gn \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} (\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{q}}), \delta n \right\rangle_\Omega \\ & + \int_0^T \left\langle g \frac{n^2}{h^{7/3}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \tilde{\mathbf{q}} + \|\mathbf{q}\| \tilde{\mathbf{q}} \right), d\mathbf{q} \right\rangle_\Omega - \int_0^T \left\langle \frac{7}{3} gn^2 \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} (\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{q}}), dh \right\rangle_\Omega = 0 . \end{aligned} \tag{2.9}$$

On pose alors le système adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{h} - \frac{1}{h^2} [(\mathbf{q} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{q}}] \cdot \mathbf{q} + gh \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ \quad - g \tilde{\mathbf{q}} \cdot \nabla z_b + \frac{7}{3} g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = C_h^T (C_h h - h^{obs}) \\ \partial_t \tilde{\mathbf{q}} + \nabla \tilde{h} + \frac{1}{h} (\mathbf{q} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{h} (\nabla \tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{q} \\ \quad - g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} \tilde{\mathbf{q}} - g \frac{n^2}{h^{7/3} \|\mathbf{q}\|} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} = C_{\mathbf{q}}^T (C_{\mathbf{q}} \mathbf{q} - \mathbf{q}^{obs}) \\ \tilde{h}(T) = 0, \quad \tilde{\mathbf{q}}(T) = 0 . \end{array} \right. \tag{2.10}$$

En substituant les équations du système adjoint (2.10) et la dérivée de Gâteaux de la fonction coût (2.8) à l'intérieur de l'équation (2.9) et en réorganisant les

différents termes, il reste :

$$\begin{aligned}
\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta \mathbf{k}) = & -\left\langle \widetilde{h}(0), \delta h^0 \right\rangle_{\Omega} - \left\langle \widetilde{\mathbf{q}}(0), \delta \mathbf{q}^0 \right\rangle_{\Omega} - \int_0^T \left\langle \operatorname{div}(gh\widetilde{\mathbf{q}}), \delta z_b \right\rangle_{\Omega} \\
& + \int_0^T \left\langle 2gn \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} (\mathbf{q} \cdot \widetilde{\mathbf{q}}), \delta n \right\rangle_{\Omega} + \int_0^T \left\langle \widetilde{h}, d\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\partial\Omega} \\
& + \int_0^T \left\langle \frac{1}{h} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{h} (\mathbf{q} \cdot \widetilde{\mathbf{q}}) \mathbf{n}, d\mathbf{q} \right\rangle_{\partial\Omega} - \int_0^T \left\langle \frac{1}{h^2} (\mathbf{q} \cdot \widetilde{\mathbf{q}}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}), dh \right\rangle_{\partial\Omega} \\
& + \int_0^T \left\langle gh(\widetilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}), dh \right\rangle_{\partial\Omega} + \int_0^T \left\langle gh(\widetilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}), \delta z_b \right\rangle_{\partial\Omega} + \alpha_p \left\langle D^T D z_b, \delta z_b \right\rangle_{\Omega}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Les variables de contrôle  $h^0$ ,  $\mathbf{q}^0$ ,  $n$  et  $z_b$  ne dépendent pas du temps et sont des variables définies sur le domaine  $\Omega$ . Avec les notations introduites précédemment, on écrit alors la dérivée directionnelle de la fonction coût comme le produit scalaire entre les dérivées partielles au sens de Fréchet et les composantes du vecteur de perturbation. Par exemple pour la condition initiale sur la hauteur d'eau :

$$\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta h^0) = \left\langle \frac{\partial j}{\partial h^0}(\mathbf{k}), \delta h^0 \right\rangle_{\Omega}$$

Les variables de contrôle  $\bar{q}$  et  $\bar{z}_s$  dépendent du temps et sont des variables définies respectivement sur les bords  $\Gamma_q$  et  $\Gamma_z$  du domaine  $\Omega$ . On écrit alors :

$$\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta \bar{q}) = \int_0^T \left\langle \frac{\partial j}{\partial \bar{q}}(\mathbf{k})(t), \delta \bar{q}(t) \right\rangle_{\Gamma_q} dt$$

et

$$\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta \bar{z}_s) = \int_0^T \left\langle \frac{\partial j}{\partial \bar{z}_s}(\mathbf{k})(t), \delta \bar{z}_s(t) \right\rangle_{\Gamma_z} dt .$$

On obtient alors pour la dérivée directionnelle de la fonction coût l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{dj}(\mathbf{k}, \delta \mathbf{k}) = & \left\langle \frac{\partial j}{\partial h^0}(\mathbf{k}), \delta h^0 \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \frac{\partial j}{\partial \mathbf{q}^0}(\mathbf{k}), \delta \mathbf{q}^0 \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \frac{\partial j}{\partial n}(\mathbf{k}), \delta n \right\rangle_{\Omega} \\
& + \left\langle \frac{\partial j}{\partial z_b}(\mathbf{k}), \delta z_b \right\rangle_{\Omega} + \int_0^T \left\langle \frac{\partial j}{\partial \bar{q}}(\mathbf{k})(t), \delta \bar{q}(t) \right\rangle_{\Gamma_q} dt \\
& + \int_0^T \left\langle \frac{\partial j}{\partial \bar{z}_s}(\mathbf{k})(t), \delta \bar{z}_s(t) \right\rangle_{\Gamma_z} dt .
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Une certaine similitude entre les expressions (2.11) et (2.12) transparaît. On utilise les conditions aux limites du modèle linéarisé (2.7) qui imposent des conditions

sur les variables  $dh$  et  $d\mathbf{q}$  pour simplifier certains termes de bords de (2.12). On se débarrasse des autres termes de bord qui dépendent de  $dh$  ou  $d\mathbf{q}$  en posant des conditions aux limites sur le système adjoint :

$$\begin{aligned} \text{C.L. : } \quad & \tilde{\mathbf{q}}|_{\Gamma_q} = 0, \quad (\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_w} = 0, \quad \tilde{\mathbf{q}}|_{\Gamma_t} = 0, \quad (\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_z} = 0, \\ & (\partial_{\mathbf{n}} \tilde{h})|_{\Gamma_q \cup \Gamma_w} = 0, \quad \tilde{h}|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left( \tilde{h} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) \right)|_{\Gamma_z} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En comparant les termes restants dans (2.11) avec ceux de l'équation (2.12), on en déduit finalement l'expression des dérivées partielles de la fonction coût par rapport à chaque variable de contrôle en fonction des variables adjointes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial h^0}(\mathbf{k}) &= -\tilde{h}(0), \quad \frac{\partial j}{\partial \mathbf{q}^0}(\mathbf{k}) = -\tilde{\mathbf{q}}(0), \\ \frac{\partial j}{\partial z_b}(\mathbf{k}) &= \alpha_p D^T D z_b - \int_0^T \operatorname{div} \left( gh(t) \tilde{\mathbf{q}}(t) \right) dt, \\ \frac{\partial j}{\partial n}(\mathbf{k}) &= 2gn \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| h(t)^{-\frac{1}{3}} \langle \mathbf{u}(t), \tilde{\mathbf{q}}(t) \rangle_{\Omega} dt, \\ \frac{\partial j}{\partial \bar{q}}(\mathbf{k}) &= -\tilde{h}|_{\Gamma_q}, \\ \frac{\partial j}{\partial \bar{z}_s}(\mathbf{k}) &= \left[ (\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) \left( c^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 \right) \right] |_{\Gamma_z}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le système obtenu en assemblant les équations (2.4), (2.5), (2.10), (2.13) et en annulant les équations de (2.14) est le système d'optimalité contenant toute l'information disponible sur le système d'observation correspondant à notre modèle Saint-Venant associé à la fonction coût (2.6).

## 2.3 Discrétisation des équations

Dans cette partie, nous présentons la méthode de résolution des équations de Saint-Venant bidimensionnelles du modèle direct (2.4)–(2.5) basée sur la méthode des volumes finis [60], pour des maillages formés d'éléments triangulaires et quadrangulaires.

### 2.3.1 Hyperbolicité

Les équations de Saint-Venant bidimensionnelles sous forme conservative (2.4) peuvent s'écrire sous forme compacte de la manière suivante :

$$\partial_t U + \operatorname{div} F(U) = S(U), \quad (2.15)$$



où  $U$  est le vecteur des variables d'état conservatives,  $F$  un vecteur de flux et  $S$  un terme source. Le vecteur d'état s'écrit indifféremment  $U = (h, \mathbf{q})^T$  ou  $(h, q_x, q_y)^T$  ou  $(h, hu, hv)^T$  et les vecteurs  $F$  et  $S$  sont définis par :

$$F(U) = \begin{pmatrix} G(U) \\ H(U) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \partial_x z_b - g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|_2}{h^{7/3}} q_x \\ -gh \partial_y z_b - g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|_2}{h^{7/3}} q_y \end{pmatrix},$$

avec

$$G(U) = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{1}{h} q_x^2 + \frac{1}{2} gh^2 \\ \frac{1}{h} q_x q_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H(U) = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{1}{h} q_x q_y \\ \frac{1}{h} q_y^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Le système d'équations (2.15) peut également s'écrire sous une forme quasi-linéaire :

$$\partial_t U + G'(U) \partial_x U + H'(U) \partial_y U = S(U) \quad (2.17)$$

où  $G'(U)$  et  $H'(U)$  sont les matrices jacobienues de  $G(U)$  et  $H(U)$  respectivement, dont l'expression en fonction des variables scalaires est donnée par :

$$G'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - \frac{q_x^2}{h^2} & 2\frac{q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{pmatrix}, \quad H'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \\ gh - \frac{q_y^2}{h^2} & 0 & 2\frac{q_y}{h} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

### Définition 2.3.1

Un système d'équations bidimensionnel de la forme  $\partial_t U + \partial_x G(U) + \partial_y H(U) = 0$  est dit hyperbolique si, pour tout vecteur  $U$  et pour tout vecteur  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$  donné non nul, la matrice

$$A_{\mathbf{n}}(U) = G'(U)n_x + H'(U)n_y \quad (2.19)$$

formée à partir des matrices jacobienues de  $G(U)$  et  $H(U)$ , est diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Le système est dit strictement hyperbolique si de plus les valeurs propres sont toutes distinctes.

Le système (2.17) homogène, c'est-à-dire avec  $S(U) \equiv 0$ , est hyperbolique. En effet, les valeurs propres de la matrice (2.19) pour ce système sont les suivantes :

$$\lambda_1^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{h} - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{h}, \quad \lambda_3^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{h} + \sqrt{gh}. \quad (2.20)$$

De plus, dès que la hauteur d'eau  $h$  est strictement positive, les valeurs propres sont toutes différentes et le système Saint-Venant homogène est strictement hyperbolique.

Pour une étude plus approfondie du caractère hyperbolique de ces équations, le lecteur pourra se référer par exemple à [92]. Nous mettons à profit cette propriété des équations pour construire le schéma numérique de résolution basé sur la méthode des volumes finis.

### 2.3.2 Schéma volumes finis

La méthode des volumes finis a été introduite initialement par Godunov [32] en 1959 pour la résolution des équations d'Euler non-linéaires. Elle est particulièrement adaptée à la discrétisation des équations hyperboliques acceptant des solutions discontinues, comme c'est le cas des équations de Saint-Venant. Pour une présentation détaillée de la méthode des volumes finis pour les problèmes hyperboliques, le lecteur peut consulter [60].

Le domaine de calcul  $\Omega$  est discrétisé par un maillage composé d'éléments triangulaires et/ou quadrangulaires, comme représenté sur la figure 2.2. À partir de cette discrétisation, la méthode des volumes finis consiste à calculer une approximation de la valeur moyenne de la solution sur chaque cellule. Plus précisément, soit  $\Omega = \bigcup_i K_i$  une partition du domaine de calcul. Les équations sous forme compacte (2.15) sont intégrées sur chaque cellule  $K_i$ , ce qui donne après intégration par parties du terme de divergence :

$$\int_{K_i} \partial_t U \, d\Omega + \int_{\partial K_i} F(U) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{K_i} S(U) \, d\Omega , \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $K_i$ . Le terme de flux peut s'écrire, en décomposant l'intégrale sur toutes les faces de la cellule, de la manière suivante :

$$\int_{\partial K_i} F(U) \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j=1}^{N_i} \int_{E_{ij}} F(U) \cdot \mathbf{n}_{ij} \, ds \quad (2.22)$$

où  $N_i$  est le nombre de faces (3 ou 4) de la cellule  $K_i$ ,  $E_{ij}$  est la  $j^{\text{ème}}$  face de la cellule  $K_i$  (voir la figure 2.3), le vecteur  $\mathbf{n}_{ij}$  est le vecteur normal unitaire extérieur, formant un angle  $\theta_{ij}$  avec l'axe des abscisses de référence  $x$ .

Enfin, les équations de Saint-Venant possèdent une propriété d'invariance par rotation entre les vecteurs  $G$  et  $H$  [92, p. 65] qui permet d'écrire :

$$F(U) \cdot \mathbf{n}_{ij} = T_{ij}^{-1} G(T_{ij} U) , \quad (2.23)$$

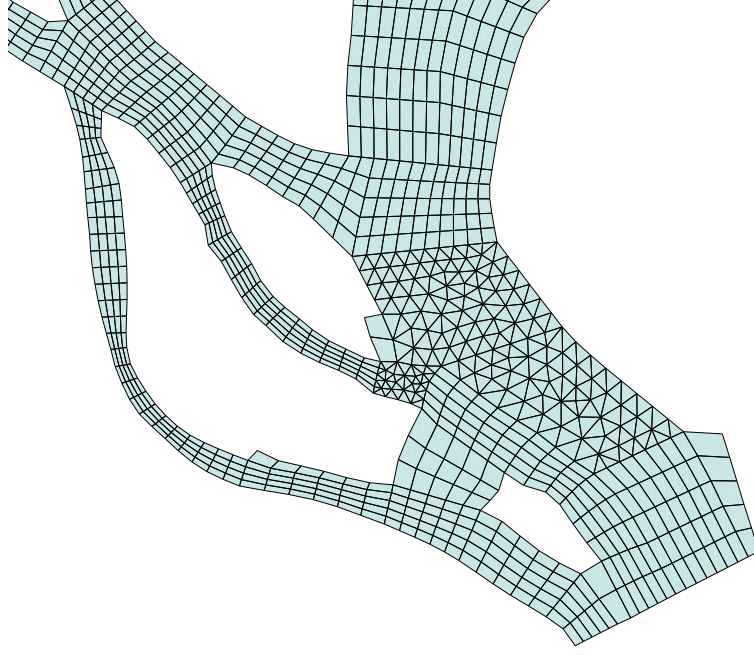


FIG. 2.2 – Partie d'un maillage non structuré composé d'éléments triangulaires et quadrangulaires.

où  $T_{ij}$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta_{ij}$  :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{ij} & \sin \theta_{ij} \\ 0 & -\sin \theta_{ij} & \cos \theta_{ij} \end{bmatrix} .$$

Cette propriété d'invariance par rotation permet de réduire le calcul du terme de flux à une somme de problèmes unidimensionnels, que l'on pourra résoudre numériquement à l'aide d'un solveur de Riemann. Auparavant, on fait l'approximation que la variable d'état  $U$  est constante sur chacune des cellules  $K_i$  du maillage et correspond à sa moyenne sur celle-ci :

$$U_i = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} U \, d\Omega ,$$

où  $|K_i|$  est la surface de la cellule. À partir de la relation intégrale (2.21), on peut alors écrire l'évolution de l'approximation  $U_i$  au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} U_i + \frac{1}{|K_i|} \sum_{j=1}^{N_i} \int_{E_{ij}} T_{ij}^{-1} G(T_{ij} U) \, ds = S_i$$

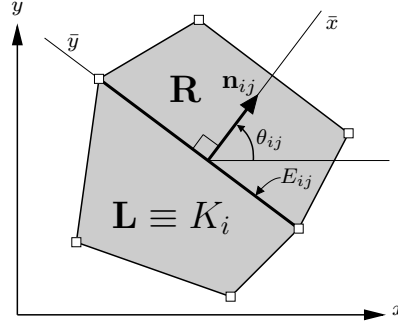


FIG. 2.3 – Deux volumes de contrôle adjacents.

où  $S_i$  est une approximation de la moyenne de  $S(U)$  sur la cellule  $K_i$ . On voit que le terme de flux se réduit à une somme d'intégrales sur les faces  $E_{ij}$  des cellules. En pratique, ces intégrales vont être calculées numériquement à l'aide d'un solveur de Riemann approché.

Pour présenter cela, introduisons les notations suivantes : soit  $U_L = T_{ij}U_i$  et  $U_R$  la valeur moyenne de  $T_{ij}U$  sur le volume adjacent à  $K_i$  par la face  $E_{ij}$ . Un solveur de Riemann approché calcule à partir de ces données la quantité

$$\tilde{G}(U_L, U_R) \approx \frac{1}{|E_{ij}|} \int_{E_{ij}} G(T_{ij}U) ds, \quad (2.24)$$

approximation du terme de flux, où  $|E_{ij}|$  désigne la longueur de la face  $E_{ij}$ . Le schéma volumes finis utilisé par le logiciel Dassflow est basé sur le solveur de Riemann approché HLLC.

### Schéma HLLC

Le solveur HLLC [93] est une extension du solveur de Riemann HLL introduit par Harten, Lax et van Leer [38]. Ce schéma est d'ordre un et permet de traiter correctement la transition entre le régime sous-critique et le régime super-critique, contrairement à la plupart des autres schémas du premier ordre [100]. La description complète du schéma HLLC qui a servi à son implémentation dans le logiciel Dassflow se trouve dans [92].

Présentons tout d'abord brièvement le schéma HLL. Soient  $s_L$  et  $s_R$  les vitesses d'onde gauche et droite respectivement, dont l'expression sera donnée plus loin. Le flux (2.24) est approché numériquement de la manière suivante :

$$\tilde{G}^{\text{HLL}}(U_L, U_R) = \begin{cases} G(U_L) & \text{si } s_L \geq 0 \\ G(U_R) & \text{si } s_R \leq 0 \\ G^*(U_L, U_R) & \text{si } s_L < 0 \text{ et } s_R > 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $G^*(U_L, U_R)$  est donné par :

$$G^*(U_L, U_R) = \frac{s_R G(U_L) - s_L G(U_R) + s_R s_L (U_R - U_L)}{s_R - s_L} \quad (2.26)$$

Les valeurs des vitesses d'onde  $s_L$  et  $s_R$  sont estimées par :

$$s_L = u_L - c_L p_L \quad \text{et} \quad s_R = u_R + c_R p_R \quad (2.27)$$

où, pour  $k = L, R$  la célérité des ondes  $c_k$  est définie par  $c_k = \sqrt{gh_k}$  et le coefficient  $p_k$  est donné par

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \sqrt{\frac{1}{2} h^* (h^* + h_k)} & \text{si } h^* > h_k \\ 1 & \text{si } h^* \leq h_k \end{cases}$$

où  $h^*$  est la hauteur d'eau à l'interface entre les cellules  $L$  et  $R$ . Sa valeur est estimée en deux temps, par la procédure suivante. Une première approximation  $h_0^*$  basée sur une condition de positivité de la hauteur d'eau est donnée par :

$$h_0^* = \frac{h_L + h_R}{2} \left( 1 - \frac{u_R - u_L}{2(c_L + c_R)} \right).$$

Si  $h_0^* \leq \min(h_L, h_R)$ , alors on est en présence de deux ondes de raréfaction et  $h^*$  est estimé par la formule :

$$h^* = \frac{1}{g} \left( \frac{c_L + c_R}{2} + \frac{u_L - u_R}{4} \right)^2.$$

Si  $h_0^* > \max(h_L, h_R)$ , on est en présence de deux ondes de choc et  $h^*$  est estimé par la formule :

$$h^* = \frac{h_L g_L + h_R g_R + u_L - u_R}{g_L + g_R},$$

où  $g_L$  et  $g_R$  sont des coefficients définis par  $g_k = \sqrt{\frac{g(h_0^* + h_k)}{2h_0^* k_k}}$  pour  $k = L, R$ .

Si  $\min(h_L, h_R) < h_0^* < \max(h_L, h_R)$ , on garde l'estimation  $h^* = h_0^*$ .

La modification du schéma HLL apportée par Toro dans le schéma HLLC pour résoudre correctement la discontinuité de contact fait intervenir une onde intermédiaire de vitesse  $s^*$ . Par rapport au schéma HLL, seule la troisième composante du flux discret est modifiée. Si l'on note le flux discret sous forme vectorielle  $\tilde{G} = [\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3]^T$ , on a alors :

$$\tilde{G}_3^{\text{HLLC}}(U_L, U_R) = \begin{cases} v_L \tilde{G}_1^{\text{HLL}}(U_L, U_R) & \text{si } s^* \geq 0 \\ v_R \tilde{G}_1^{\text{HLL}}(U_L, U_R) & \text{si } s^* < 0 \end{cases}$$

avec

$$s^* = \frac{s_L h_R (u_R - s_R) - s_R h_L (u_L - s_L)}{h_R (u_R - s_R) - h_L (u_L - s_L)}.$$

### Traitement du front sec

En présence d'un front sec, c'est-à-dire lorsque la hauteur d'eau  $h$  est nulle sur une cellule adjacente à une cellule "mouillée", les vitesses d'onde introduites en (2.27) pour le calcul du terme de flux ne sont plus valables et doivent être adaptées selon la configuration. Toro [92, p. 197] propose le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \text{si } h_L = 0 & \quad \text{alors} \quad s_L = u_R - 2c_R, \quad s_R = u_R + c_R, \quad s^* = s_L \\ \text{si } h_R = 0 & \quad \text{alors} \quad s_L = u_L - c_L, \quad s_R = u_L + 2c_L, \quad s^* = s_R. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cette méthode est efficace quand le terme de gradient de topographie  $\nabla z_b$  est absent des équations. Si ce dernier n'est pas nul, le schéma numérique peut se révéler instable. Pour pallier ce problème et pouvoir néanmoins traiter des configurations dans lesquelles la topographie  $z_b$  n'est pas constante, on introduit une hauteur d'eau minimale  $h_\epsilon > 0$ . Si la hauteur d'eau dans une cellule est inférieure à cette valeur, la cellule est considérée comme sèche et la vitesse du fluide nulle. Dans le calcul du flux discret faisant intervenir une cellule sèche, les vitesses d'onde modifiées (2.28) sont alors utilisées. La valeur de  $h_\epsilon$  doit idéalement être la plus petite possible ; on la choisit en pratique de l'ordre de  $10^{-3}$ .

### Traitement du terme source

Pour résumer, la forme semi-discrétisée en espace de l'équation d'évolution sous forme compacte de la variable d'état  $U_i$  pour une cellule  $K_i \equiv L$  s'écrit avec les notations introduites précédemment :

$$\frac{d}{dt} U_i + \frac{1}{|K_i|} \sum_{j=1}^{N_i} |E_{ij}| T_{ij}^{-1} \tilde{G}(U_L, U_R) = S_i.$$

Le terme de flux  $\tilde{G}(U_L, U_R)$  est calculé numériquement par le solveur de Riemann HLLC présenté dans le paragraphe précédent. Pour la résolution de l'équation complète et la discrétisation en temps, on peut envisager une méthode à pas fractionnaire ou de décomposition d'opérateur (par exemple le schéma de Strang [87]), simple à mettre en œuvre car elle permet un traitement explicite ou semi-implicite du terme source  $S_i$ . Malheureusement, cette méthode ne préserve pas certains états stationnaires comme celui par exemple du *lac au repos*. À cause de la production

d'oscillations numériques par ces méthodes, l'équilibre entre le terme de flux et le terme de gradient de topographie n'est pas préservé. La question du traitement équilibré du terme source dans les équations de Saint-Venant fait l'objet d'une abondante série de publications (voir entre autres [9, 8, 59, 73]).

La méthode adoptée pour le traitement du terme source dans le logiciel Dassflow consiste à modifier le calcul du terme de flux afin d'y inclure celui du gradient de topographie, de manière à ce que certains états stationnaires soient préservés. Pour cela, une discrétisation adéquate du terme source doit être effectuée. Bermúdez *et al* [8] et LeVeque [61] utilisent cette approche pour différents solveurs de Riemann.

Concernant le schéma HLLC, le vecteur  $G$  utilisé dans le calcul du flux discret (2.25) est modifié pour y intégrer le calcul du terme de gradient de topographie [25] :

$$G^S(U_R) = G(U_R) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_L + h_R)(z_{b,R} - z_{b,L}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette expression est utilisée à la place de  $G(U_R)$  dans les équations (2.25) et (2.26). Il en résulte que le flux discret  $\tilde{G}^S(U_L, U_R)$  calculé par l'équation (2.25) ainsi modifiée préserve les états stationnaires de type *lac au repos*.

Dans le terme source  $S_i$  ne reste plus que le terme non-linéaire lié aux forces de frottement dont la discrétisation en espace s'écrit :

$$S_i^f = -g \frac{n^2 \sqrt{u_L^2 + v_L^2}}{h_L^{1/3}} \begin{pmatrix} 0 \\ u_L \\ v_L \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Ainsi, l'équation d'évolution semi-discrétisée en espace de la variable d'état  $U_i$  pour une cellule  $K_i \equiv L$ , avec intégration du terme de gradient de topographie dans le terme de flux s'écrit :

$$\frac{d}{dt}U_i + \frac{1}{|K_i|} \sum_{j=1}^{N_i} |E_{ij}| T_{ij}^{-1} \tilde{G}^S(U_L, U_R) = S_i^f \quad (2.30)$$

### Schéma de discrétisation temporelle

Finalement, l'équation (2.30) est discrétisée en temps par un schéma d'Euler explicite pour obtenir :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^{N_i} T_{ij}^{-1} \tilde{G}^S(U_L^n, U_R^n) + \Delta t S_i^{f,n}, \quad (2.31)$$

où  $U_i^n = (h_i^n, \mathbf{q}_i^n)^T$  est l'approximation de  $U_i$  au temps  $t^n$  et  $S_i^{f,n}$  l'évaluation au temps  $t^n$  du terme (2.29). Ce choix d'un schéma explicite permet d'éviter la coûteuse résolution d'un système non-linéaire à chaque itération en temps mais impose une condition de stabilité sur le choix du pas de temps. Une analyse de stabilité sur les équations linéarisées fournit la restriction CFL suivante [92, p. 157] :

$$\text{CFL} = \Delta t \frac{\max(\|\mathbf{u}\| + c)}{\min(d_{L,R})} \leq 1, \quad (2.32)$$

où  $d_{L,R}$  est la distance entre le centre de la cellule  $L$  et le centre de sa face qui le sépare du volume  $R$ .

Tel qu'écrit dans l'équation (2.31), le terme de frottement  $S_i^f$  est traité comme les autres de manière explicite. Il peut néanmoins être traité de manière semi-implicite avec un coût de calcul supplémentaire négligeable.

### Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont prises en compte en calculant le flux à travers les faces du bord  $\Gamma$  entre les cellules intérieures et des cellules voisines, dites “fantômes”, extérieures au domaine. Si le volume  $L \equiv K_i$  est adjacent à  $\Gamma$ , alors on définit un volume “fantôme”  $R$  de même aire, avec une valeur particulière de la variable d'état  $U_R$  telle que le flux numérique  $\tilde{G}(U_L^n, U_R^n)$  calculé corresponde à la condition aux limites désirée :

- sur  $\Gamma_q$  : on prescrit un débit scalaire  $\bar{q}(t)$  exprimé en  $m^3 s^{-1}$ . Cette valeur scalaire est distribuée sur toute la frontière à chaque pas de temps sous la forme d'un débit local par unité de longueur  $q_L^n$  exprimé en  $m^2 s^{-1}$ . La distribution du débit est faite de manière à ce que la vitesse normale sur  $\Gamma_q$  soit constante sur la section mouillée. Cela donne :

$$q_L^n = \frac{1}{\mathcal{A}^n} h_L^n \bar{q}(t^n),$$

où  $\mathcal{A}^n$  est la surface de la section mouillée sur le bord à l'instant  $t^n$ . Numériquement, on calcule donc le flux à travers chaque face de  $\Gamma_q$  en utilisant le solveur HLLC avec  $U_R^n = (h_L^n, -q_L^n/h_L^n, v_L^n)^T$ .

- sur  $\Gamma_w$  : on prescrit la condition de Neumann homogène sur la hauteur en imposant  $h_R = h_L$  et la condition d'imperméabilité sur la vitesse en imposant  $u_R = -u_L$  et  $v_R = v_L$ . Ainsi, on calcule le flux à travers chaque face de  $\Gamma_w$  en utilisant le solveur HLLC avec  $U_R^n = (h_L^n, -u_L^n, v_L^n)^T$ .



- sur  $\Gamma_t$  : on prescrit des conditions de Neumann homogènes sur toutes les variables d'état en utilisant le solveur HLLC avec les données  $U_R^n = U_L^n$ .
- sur  $\Gamma_z$  : on prescrit un niveau d'eau  $\bar{z}_s$  en imposant une hauteur d'eau dans le volume fantôme adjacent  $h_R = (\bar{z}_s - z_{b,R})$  et en imposant également la vitesse de manière à ce que l'invariant de Riemann correspondant à la caractéristique entrante soit constant sur l'interface, c'est-à-dire que l'on impose :

$$u_L^n + 2\sqrt{gh_L^n} = u_R^n + 2\sqrt{gh_R^n}.$$

Ainsi, le flux à travers chaque face de  $\Gamma_z$  est calculé en utilisant le solveur HLLC avec les données :

$$U_R^n = \begin{pmatrix} \bar{z}_s^n - z_{b,R} \\ u_L^n + 2\sqrt{g}\left(\sqrt{h_L^n} - \sqrt{\bar{z}_s^n - z_{b,R}}\right) \\ v_L^n \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Le logiciel Dassflow

Le logiciel Dassflow [44, 45] a été co-développé<sup>1</sup> dans le cadre de cette thèse afin de pouvoir réaliser des simulations numériques d'écoulements Saint-Venant ainsi que des expériences d'assimilation variationnelle de données. Écrit en Fortran 90, le code direct permet la résolution des équations introduites dans la partie 2.1 à l'aide du schéma numérique décrit dans la partie 2.3 de ce chapitre. Par ailleurs, son code adjoint [17] a été développé à l'aide du logiciel de différentiation automatique par transformation de source TAPENADE, présenté dans la partie 1.4.

Ces deux modules sont combinés avec la routine de minimisation M1QN3 présentée dans la partie 1.5 et toutes les routines de lecture et écriture nécessaires à la réalisation d'expériences d'assimilation de données, y compris des expériences jumelles dans lesquelles les observations sont créées par le modèle (voir partie 3.1). Le logiciel offre trois modes de fonctionnement :

1. un **mode libre** permet de réaliser des simulations numériques avec le code direct. Les données du problème sont définies principalement à partir de routines modifiables par l'utilisateur. Le pas de temps de calcul peut être calculé automatiquement à partir de la condition CFL (2.32). Ce mode de fonctionnement sert notamment à enregistrer dans un fichier la variable d'état finale d'une simulation d'écoulement, pour pouvoir l'utiliser comme condition initiale dans des simulations ultérieures. Ce mode sert également à créer des observations synthétiques destinées aux expériences jumelles.

<sup>1</sup> Site web : <http://dassflow.gforge.inria.fr/>

2. un **mode imposé** rend possible, comme le mode libre, des simulations avec le code direct. Mais il permet en plus de calculer une fonction coût dans les mêmes conditions que dans une expérience d'assimilation de données. Les observations sont lues à partir d'un fichier et les variables de contrôle du modèle peuvent être modifiées par rapport à leur valeur de référence. Le pas de temps de calcul doit être fixé par l'utilisateur à une valeur constante. Ce mode de fonctionnement sert entre autres à vérifier que toute la procédure de calcul en mode direct fonctionne correctement avant de passer à l'assimilation de données.
3. un **mode assimilation** permet d'effectuer des expériences d'assimilation de données. Les valeurs initiales des variables de contrôle du modèle direct sont définies soit par l'intermédiaire de routines utilisateur, soit sont lues dans des fichiers de données. La routine M1QN3 est ensuite appelée directement afin de procéder à la minimisation de la fonction coût.

Les fichiers de résultats peuvent être produits sous différents formats de données : pour les résultats correspondant à des maillages structurés, un format en mode colonnes est directement lisible par le logiciel de visualisation Gnuplot [97]. Pour les résultats correspondant à des maillages non-structurés, le format ouvert VTK [53] est disponible ainsi que le format propriétaire Tecplot<sup>TM</sup> [89].

Afin de mettre en œuvre d'un point de vue numérique l'assimilation de données lagrangiennes présentée dans les chapitres 4 et 5, les fonctionnalités de base du logiciel ont été étendues sous la forme d'un module de calcul additionnel. Le schéma numérique utilisé est décrit en détails dans les parties 4.3 et 4.4.

Toutes les simulations numériques et les expériences d'assimilation de données présentées dans les chapitres 3 et 5 ont été effectuées avec le logiciel Dassflow.

## Chapitre 3

# Expériences d'assimilation de données eulériennes

Ce chapitre présente des expériences d'assimilation de données utilisant des observations eulériennes. Comme indiqué dans le chapitre d'introduction, nous appelons eulériennes les observations faites en un point fixe du domaine. En hydraulique fluviale, il s'agit des observations communément disponibles de hauteur d'eau et de vitesse.

L'assimilation variationnelle de données eulériennes en hydraulique fluviale a été étudiée notamment par Yang [99] pour des problèmes de transport de sédiments en rivière avec un modèle simple basé sur les équations de Saint-Venant bidimensionnelles. Ce modèle a été repris par Mazauric [64] pour étudier des problèmes d'identification de paramètres, d'analyse de sensibilité, de couplage et de parallélisation. Ces travaux ont montré la faisabilité de l'assimilation variationnelle de données pour l'hydraulique fluviale, principalement pour des ensembles d'observations denses en espace.

En pratique cependant, les techniques de mesure sur les rivières permettent actuellement d'obtenir des observations de hauteur d'eau avec une fréquence potentiellement importante en temps, mais seulement pour un nombre très restreint de stations de mesures. Concernant les observations de vitesse, elles sont encore plus difficiles à obtenir. Nous allons donc nous intéresser dans ce chapitre à des applications dans lesquelles les observations ne sont disponibles qu'avec une faible densité en espace.

Nous présentons, à travers deux séries d'expériences, des problèmes d'identification de paramètres du modèle Saint-Venant. Nous montrons tout d'abord des résultats obtenus avec des données réelles sur une portion de la Pearl River en Chine. Il s'agit de l'identification de conditions aux limites à partir d'observations de hauteur d'eau

et de débit. Dans une seconde partie, une série d'expériences jumelles montre sur un cas-test simple les conséquences d'une trop faible quantité d'observations pour un problème d'identification de débit. Mais dans un premier temps, introduisons la notion d'expériences jumelles.

### 3.1 Principe des expériences jumelles

Les expériences jumelles d'assimilation de données sont basées sur l'utilisation d'observations synthétiques créées par le modèle avec un jeu de paramètres donné. Elles permettent d'évaluer une méthode d'assimilation de données dans un cadre maîtrisé, avec une connaissance complète de tous les paramètres. Nous les utiliserons dans la partie 3.3 de ce chapitre, ainsi que dans le chapitre 5.

Dans un premier temps, une simulation de référence est réalisée à partir d'un vecteur de contrôle  $\mathbf{k}^{ref}$  connu. Le résultat de cette simulation, c'est-à-dire la valeur des variables d'état que l'on note  $(h^{ref}, \mathbf{q}^{ref})$ , est utilisé pour créer des observations. Dans le cadre de l'hydraulique fluviale, on peut ainsi produire des observations de hauteur d'eau notées  $h^{obs}$ , des observations de débit notées  $\mathbf{q}^{obs}$ , ainsi que des observations de vitesse notées  $\mathbf{u}^{obs}$  en se basant sur la vitesse modèle de référence  $\mathbf{u}^{ref} = \frac{\mathbf{q}^{ref}}{h^{ref}}$ .

L'objectif de l'expérience est d'identifier le vecteur de contrôle de référence  $\mathbf{k}^{ref}$  en partant d'une valeur  $\mathbf{k}^0$  donnée *a priori*. La fonction coût que l'on cherche à minimiser est formée à partir des observations synthétiques.

Afin d'évaluer la qualité de l'identification, on introduit une fonction diagnostique notée  $j_{diag}$  mesurant sur l'ensemble du domaine de calcul  $\Omega \times [0, T]$  la différence entre l'état de référence de l'écoulement et l'état issu d'un vecteur de contrôle quelconque  $\mathbf{k}$  :

$$j_{diag}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \|h(t) - h^{ref}(t)\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{ref}(t)\|_{\Omega}^2 \right) dt . \quad (3.1)$$

Cette fonction diagnostique vérifie  $j_{diag}(\mathbf{k}^{ref}) = 0$ . Elle permet de donner une mesure dans l'espace d'état de l'écart entre le vecteur de contrôle obtenu à l'issue de l'assimilation de données, noté  $\mathbf{k}^{opt}$ , et le vecteur de référence. Le vecteur  $\mathbf{k}^{opt}$  est idéalement optimal, c'est-à-dire qu'il doit minimiser la fonction coût  $j$ . Mais une identification sera jugée de qualité seulement si la valeur de  $j_{diag}(\mathbf{k}^{opt})$  est suffisamment petite, c'est-à-dire si le vecteur de contrôle identifié  $\mathbf{k}^{opt}$  produit une simulation qui est suffisamment proche globalement de la simulation de référence.

## 3.2 Données réelles : Pearl River

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'une expérience d'assimilation de données utilisant des observations réelles sur une section de la rivière des Perles. Le paramètre identifié est le niveau de surface libre  $\bar{z}_s$  aux limites du domaine de calcul. Les observations sont constituées de mesures régulières de hauteur d'eau et de débit. Ce travail [43] a été effectué en collaboration avec Xijun Lai, qui est à l'origine des données disponibles.

### 3.2.1 Domaine de calcul

La zone d'étude se situe sur l'estuaire de la rivière des Perles (Xi Jiang en Chinois ou Pearl River en Anglais). Troisième fleuve de Chine par sa longueur et deuxième par son débit après le Yangzi Jiang, la rivière des Perles se jette dans la mer de Chine méridionale, entre Hong Kong et Macau. Le domaine étudié est compris dans un rectangle de 30 km (nord-sud) par 15 km (est-ouest). De par sa proximité avec la mer, cette partie du fleuve est très influencée par la marée.

Le maillage du domaine est formé de 1684 cellules triangulaires et quadrangulaires, ce qui constitue une grille relativement grossière. Une valeur moyenne de la topographie du fond est disponible pour chaque cellule du maillage.

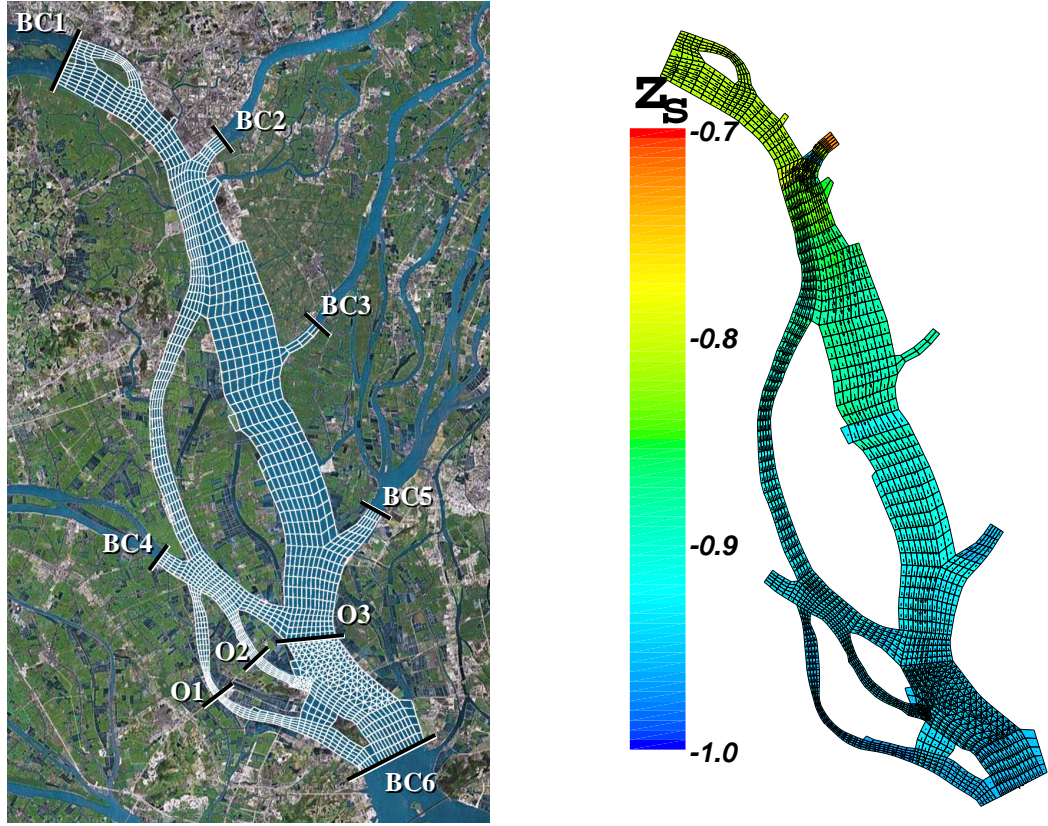
### 3.2.2 Observations

On dispose d'observations de débit et de niveau de la surface libre sur plusieurs sections du domaine. Celles-ci sont notées de  $BC_1$  à  $BC_6$  et de  $O_1$  à  $O_3$  sur la figure 3.1 (a). Plus précisément, le niveau  $z_s$  de la surface libre est donné à toutes les stations sauf en  $BC_3$ , où aucune information n'est connue, le débit est donné aux bords  $BC_4$  et  $BC_5$  ainsi qu'aux stations  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ .

Les mesures sont disponibles avec un intervalle de temps de une heure et pour une période d'observation totale qui s'étend du 30 septembre 1998 à 13 heures jusqu'au 5 octobre 1998 à 23 heures.

### 3.2.3 Identification de conditions aux limites

Étant donnés le maillage et la configuration type de l'écoulement, le pas de temps de simulation  $\Delta t$  est fixé à 3 secondes pour respecter la condition de stabilité (2.32). Afin de limiter l'empreinte mémoire du logiciel Dassflow à 2 giga-octets, quantité



(a) Maillage du domaine sur fond de carte satellite

(b) Niveau de la surface libre et vecteurs vitesse dans la configuration de référence.

FIG. 3.1 – Maillage du domaine et résultat de simulation pour la Pearl River.

disponible sur la machine de test, et afin de garder des temps de simulation raisonnables, nous n'avons utilisé qu'une partie des observations disponibles. Ainsi, la fenêtre d'assimilation, c'est-à-dire la durée en temps physique de la simulation a été fixée à  $T = 35$  heures, soit un peu moins d'un cycle et demi de marée. Cette durée correspond donc à 42 000 pas de temps de simulation.

L'expérience d'assimilation de données consiste à identifier le niveau de la surface libre  $\bar{z}_s$  aux bords  $BC_1$ ,  $BC_2$  et  $BC_6$  en utilisant les observations disponibles aux trois stations  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ .

Des conditions de Neumann homogènes sont appliquées au bord  $BC_3$  (conditions de type  $\Gamma_t$ ) ; les données de débit disponibles aux bords  $BC_4$  et  $BC_5$  sont utilisées pour y prescrire une condition limite de type  $\Gamma_q$  (débit imposé). Le débit à chaque pas de temps est calculé par une interpolation linéaire entre chaque donnée disponible.

Sur les bords  $BC_1$ ,  $BC_2$  et  $BC_6$ , une condition de type  $\Gamma_z$  est prescrite.

La variable de contrôle de l'expérience d'assimilation de données est le vecteur constitué de la valeur du niveau de surface libre  $\bar{z}_s$  sur ces trois frontières. On note ses composantes respectivement  $\bar{z}_{s1}$ ,  $\bar{z}_{s2}$  et  $\bar{z}_{s6}$  et on leur donne comme valeur *a priori*  $\bar{z}_s^0 = -0.5 m$ . Afin d'identifier la valeur optimale des variables de contrôle, on utilise la fonction coût  $j_p$  constituée de deux termes. Le premier mesure l'écart entre les hauteurs d'eau calculées et celles observées le long des sections aux trois stations d'observation  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ . Le second terme mesure l'écart entre le débit calculé et le débit observé à la station d'observation  $O_3$  :

$$j_p(\bar{z}_{s1}, \bar{z}_{s2}, \bar{z}_{s6}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{35} \left( \sum_{i=1}^3 |h_i(k\delta t) - h_i^{obs}(k\delta t)|^2 + |q_3(k\delta t) - q_3^{obs}(k\delta t)|^2 \right) \quad (3.2)$$

L'intervalle d'observation  $\delta t$  est de 3600 secondes. La quantité  $q_3(t)$  est le débit au temps  $t$  de l'écoulement intégré sur la largeur de la section  $O_3$  :

$$q_3(t) = \int_{O_3} \mathbf{q}(s; t) \cdot \mathbf{n}(s) ds ,$$

où  $s$  est la coordonnée curviligne le long de la section  $O_3$  et  $\mathbf{n}(s)$  est le vecteur normal à cette dernière.

### 3.2.4 Résultats numériques

La figure 3.2 montre le résultat de l'identification des conditions aux limites. Les valeurs moyennes sur chaque section des variables de contrôle  $\bar{z}_{s1}$ ,  $\bar{z}_{s2}$  et  $\bar{z}_{s6}$  sont tracées respectivement sur les figures (a), (b) et (c) en fonction du temps. La valeur *a priori*  $\bar{z}_s^0$  est représentée par un trait en pointillés, la valeur identifiée est représentée par un trait continu gris tandis que la valeur de référence est représentée par des points noirs. Cette dernière faisait partie des observations disponibles (voir partie 3.2.2) mais n'a pas été utilisée pour l'identification. Sur la figure (d) est représenté le niveau moyen sur les trois stations d'observation de la surface libre obtenu avec la valeur *a priori* (trait en pointillés) et la valeur identifiée (trait continu gris) des variables de contrôle. Le niveau moyen correspondant aux observations utilisées dans la fonction coût est représenté par des points noirs.

On remarque sur cette dernière figure que le niveau de la surface libre calculé avec les variables identifiées correspond parfaitement aux observations, contrairement à celui obtenu avec la valeur  $\bar{z}_s^0$  donnée *a priori*. La valeur identifiée de  $\bar{z}_{s6}$  correspond très bien à celle de référence. En revanche, on observe un écart plus important pour  $\bar{z}_{s1}$  et particulièrement pour  $\bar{z}_{s2}$ .

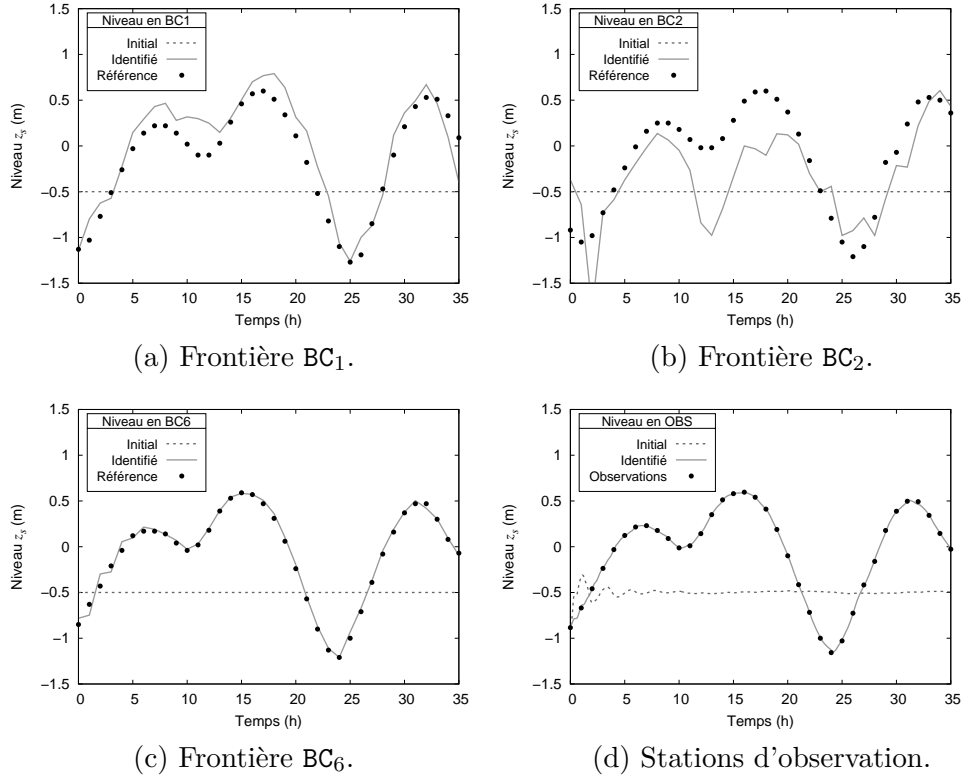


FIG. 3.2 – Identification des conditions aux limites  $\bar{z}_s$  à partir d'observations de hauteur d'eau et de débit. Niveau moyen de surface libre sur la section pour chacune des trois frontières  $BC_1$ ,  $BC_2$  et  $BC_6$  ainsi que pour les stations d'observation  $O_1$  à  $O_3$ .

La plus grande proximité du bord  $BC_6$  aux stations d'observations par rapport aux bords  $BC_1$  et  $BC_2$  explique une plus grande sensibilité de la fonction coût  $j_p$  aux variations de la variable de contrôle  $\bar{z}_{s6}$ . Cela est mis en évidence par le fait que la variable  $\bar{z}_{s6}$  est la première à être correctement identifiée, dès les premières itérations du processus d'optimisation, et que l'identification de  $\bar{z}_{s2}$  n'est pas complètement satisfaisante même à la fin de la minimisation de la fonction coût, comme le montre la figure 3.2 (b).

### 3.2.5 Conclusion

Avec cette première expérience, nous avons montré que le logiciel Dassflow est capable de simuler une configuration hydraulique réelle et d'assimiler des observations de hauteur d'eau et de débit pour l'identification de la valeur des conditions aux limites du domaine. Du point de vue de l'assimilation, la problématique liée à



l'expérience reste simple puisque les variables de contrôle et une partie des observations sont de même nature. Cependant, on note que la méthode se révèle efficace malgré la faible densité spatiale des observations.

### 3.3 Cas test : identification du débit et du coefficient de Manning

Nous présentons dans cette partie des expériences jumelles d'assimilation de données dont le but est l'identification de la variable de contrôle débit notée  $\bar{q}$  dans les équations à partir d'observations synthétiques de hauteur d'eau ayant une faible densité spatiale. Deux cas sont étudiés : dans le premier, la seule variable de contrôle inconnue *a priori* est la valeur du débit  $\bar{q}$ ; dans le second cas, on a en plus une incertitude sur la valeur du coefficient de Manning  $n$ .

#### 3.3.1 Configuration de test

On considère un écoulement dans un canal rectangulaire de  $100\text{ m}$  de long et  $8\text{ m}$  de large, représenté de manière schématique sur la figure 3.3. L'élévation du fond, tracée en perspective sur la figure 3.4 (b), est donnée par la fonction suivante :

$$z_b^{\text{ref}}(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{x}{200} + \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) \cos\left(\frac{\pi(y-2)}{60}\right). \quad (3.3)$$

Le coefficient de Manning est fixé de manière uniforme sur le domaine à la valeur  $n^{\text{ref}} = 0.025$ . Concernant les conditions aux limites, les bords définis par  $y = 0$  et  $y = 8\text{ m}$  sont constitués de murs et notés  $\Gamma_w$ . Des conditions de Neumann homogènes sont imposées au bord  $\Gamma_t$  défini par  $x = 100\text{ m}$ . Enfin, un débit est imposé sur le bord gauche du domaine défini par  $x = 0$  et noté  $\Gamma_q$  (voir figure 3.3). La condition initiale de l'écoulement pour les expériences jumelles est définie comme l'état stationnaire obtenu en fixant la valeur  $\bar{q}$  du débit à  $5\text{ m}^3/\text{s}$ . Le domaine est discrétisé par un maillage structuré composé de  $100 \times 10$  cellules rectangulaires.

#### 3.3.2 Création des observations

Pour la réalisation des expériences jumelles, des observations de hauteur d'eau notées  $h^{\text{obs}}$  sont créées à partir d'une simulation effectuée dans une configuration

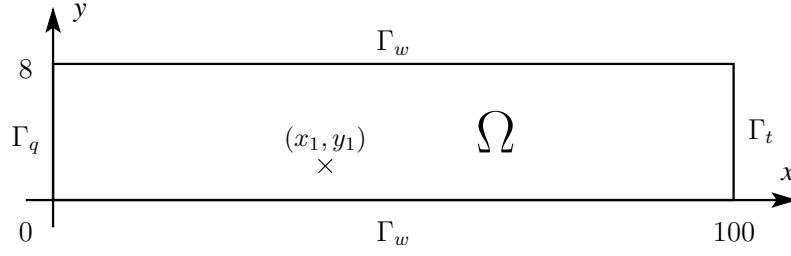
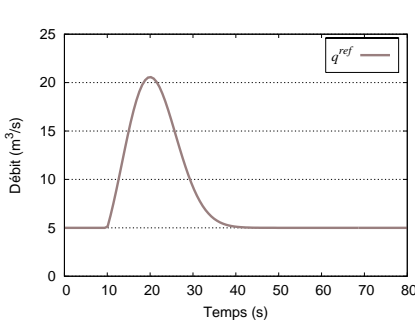


FIG. 3.3 – Identification du débit et du coefficient de Manning : vue schématique de haut du domaine de calcul.

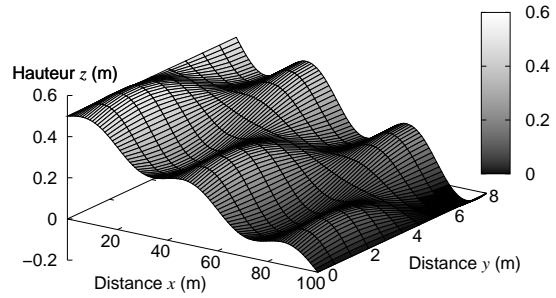
de référence. Cette dernière est obtenue en utilisant les conditions initiales décrites dans le paragraphe précédent et en imposant sur  $\Gamma_q$  un débit de référence correspondant à une onde de crue rapide :

$$\bar{q}^{ref}(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } t < 10 \\ 5 + 2(t - 10) \exp\left(-\frac{1}{100}(t - 15)^2\right) & \text{si } t \geq 10 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce débit de référence est tracé en fonction du temps sur la figure 3.4 (a). Le temps de simulation est de  $T = 80$  secondes et le pas de discrétisation en temps est fixé à  $\Delta t = 0.05$  seconde. La figure 3.5 montre une coupe du domaine fluide dans le plan  $y = 1.6$  m. On y voit en particulier l'élévation de la surface libre pour différents pas de temps. L'observation  $h^{obs}$  consiste en la mesure dans cette configuration de la hauteur d'eau en un unique point de coordonnées  $(x_1, y_1) = (40, 2)$  à chaque pas de temps.



(a) Débit de référence  $\bar{q}^{ref}$



(b) Topographie de référence  $z_b^{ref}$

FIG. 3.4 – Représentation des valeurs de référence des paramètres du modèle utilisés pour la création des observations synthétiques. Débit  $\bar{q}^{ref}$  en fonction du temps et topographie  $z_b^{ref}$  en fonction des variables d'espace.

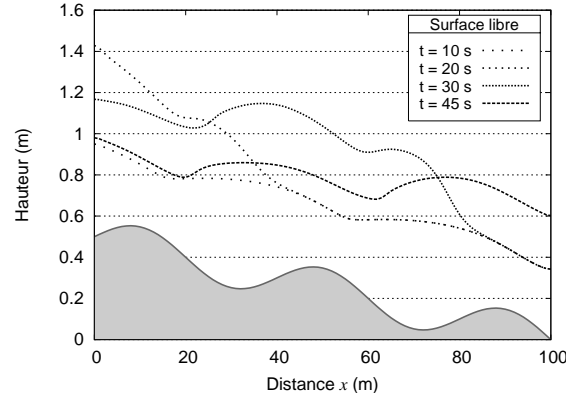


FIG. 3.5 – Coupe verticale dans le plan  $y = 1.6 \text{ m}$  du domaine fluide dans la configuration de référence. Élévation de la surface libre à différents pas de temps.

### 3.3.3 Résultats numériques

On dispose donc de l'observation de la hauteur d'eau en un unique point du domaine et de manière continue en temps. Dans les expériences jumelles d'assimilation de données présentées dans cette partie, on suppose inconnu le débit réel de l'écoulement. On part de l'hypothèse *a priori* que sa valeur initiale  $\bar{q}^0$  est constante en temps et égale à  $5 \text{ m}^3/\text{s}$ , c'est-à-dire qu'elle correspond à l'état permanent des conditions initiales.

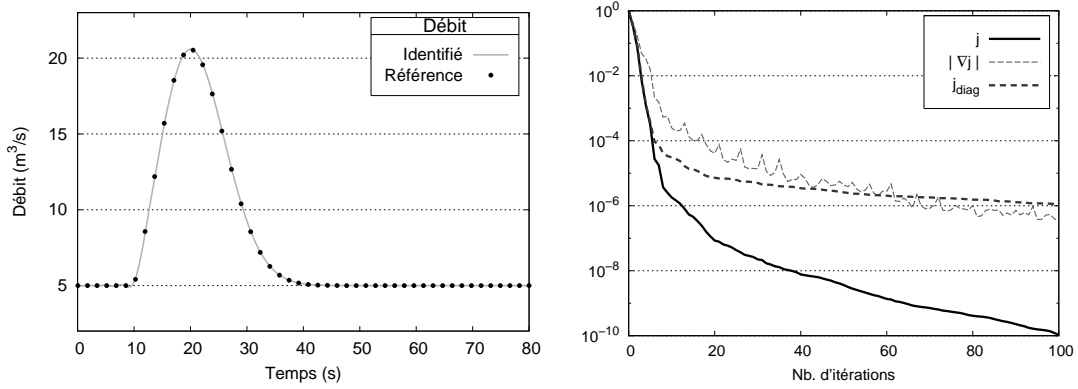
#### Identification du débit seul : configuration idéale

L'objectif de ces expériences jumelles est d'identifier correctement le débit de référence  $\bar{q}^{ref}$  qui a servi à la création des observations. Dans un premier temps, on suppose que toutes les autres variables de contrôle de l'écoulement (coefficient de Manning, élévation du fond, conditions initiales) sont connues de manière exacte.

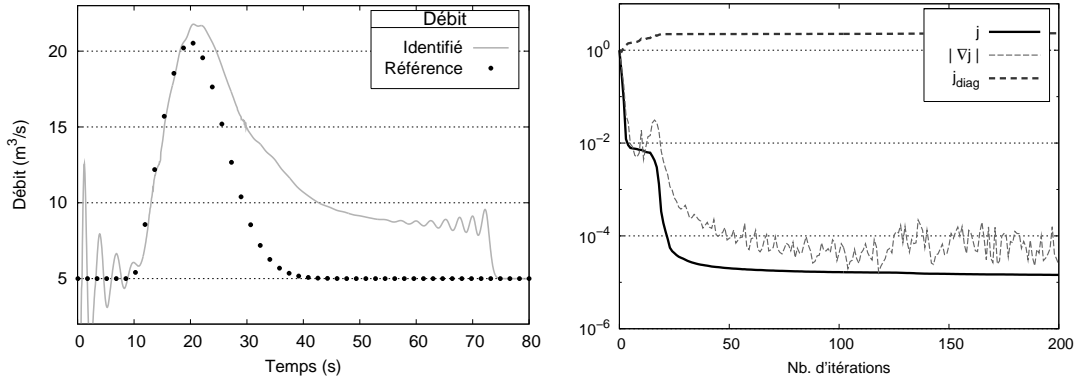
Pour une valeur quelconque  $\bar{q}$  du débit, la fonction coût  $j_1$  (3.5) mesure l'écart entre la hauteur d'eau simulée au point  $(x_1, y_1)$  et les observations  $h^{obs}$  tout au long de l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Le processus d'assimilation de données consiste à minimiser cette fonction coût :

$$j_1(\bar{q}) = \frac{1}{2} \int_0^T |h(x_1, y_1, t) - h^{obs}(t)|^2 dt \quad (3.5)$$

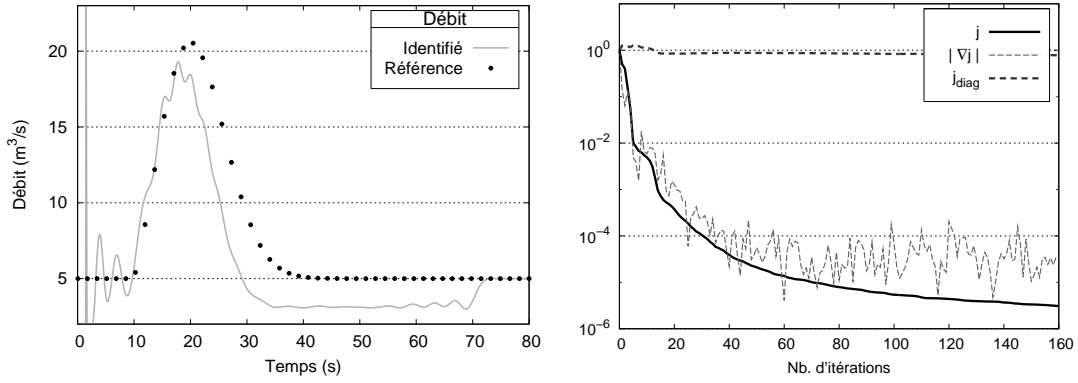
Le résultat de l'assimilation est présenté sur la figure 3.6 (a). La figure de gauche montre le débit identifié  $\bar{q}^{opt}$  en fonction du temps sur toute la période de simulation avec un trait plein. Ce dernier concorde presque parfaitement avec le débit de



(a) Identification du débit seulement avec coefficient de Manning exact.



(b) Identification du débit seulement avec coefficient de Manning modifié.



(c) Identification conjointe du débit et du coefficient de Manning.

FIG. 3.6 – Identification du débit et du coefficient de Manning en utilisant des mesures de hauteur d'eau seulement. Colonne de gauche : débit identifié en fonction du temps. Colonne de droite : évolution de la fonction coût, de la norme de son gradient et de la fonction diagnostique  $j_{diag}$ .

référence  $\bar{q}^{ref}$  qui est représenté avec des points noirs. Sur la figure de droite est tracée l'évolution de la valeur de  $j_1$  au cours des itérations. On observe que le processus d'optimisation a nécessité 100 itérations au terme desquelles la valeur de la fonction coût a été divisée par  $10^{10}$  par rapport à sa valeur initiale pour valoir  $4.62 \times 10^{-8}$ . Par ailleurs, la valeur de la fonction diagnostique  $j_{diag}$  introduite en (3.1) a été divisée par  $10^6$  pour ne valoir plus que 0.53 à la fin de la minimisation de  $j_1$ . Sa valeur finale n'est pas 0, ce qui montre que le débit identifié  $\bar{q}^{opt}$  n'est pas strictement égal au débit de référence  $\bar{q}^{ref}$ .

Mais il n'en reste pas moins que l'identification du débit à partir de l'observation continue en temps de hauteurs d'eau est excellente dans ce cadre d'expériences jumelles.

### Identification du débit seul : configuration dégradée

Dégradons à présent les hypothèses de départ. Dans l'expérience précédente, on supposait connues et exactes toutes les autres variables de contrôle de l'écoulement à part le débit. Faisons maintenant l'hypothèse que la valeur connue du coefficient de Manning  $n$  est sous-estimée de 20%. En d'autres termes, recommençons l'expérience d'assimilation précédente avec une valeur *a priori*  $n^0$  égale à 0.02 au lieu de la valeur de référence  $n^{ref} = 0.025$ . On cherche à minimiser la même fonction coût  $j_1$  (3.5).

Le résultat est présenté sur la figure 3.6 (b). On y voit que le débit identifié présente de fortes différences avec le débit de référence. Si l'amplitude de la crue est grossièrement retrouvée, de grandes oscillations sont présentes sur les 10 premières secondes de simulation ; par ailleurs, tout au long de la partie de décrue, la valeur du débit identifié est largement surestimée.

Sur le graphique de la colonne de droite, le nombre d'itérations du processus d'optimisation a volontairement été limité à 200, bien que celui-ci continue bien après. En effet, la valeur de la fonction coût atteint rapidement un palier au-delà duquel elle ne décroît que très lentement. Quant à la valeur de la fonction diagnostique, elle atteint un palier situé à 2.5 fois sa valeur initiale, ce qui signifie que le débit identifié correspond à une solution globale moins bonne que celle obtenue à partir de la valeur *a priori*  $\bar{q}^0$ .

Cependant, le processus d'optimisation a réussi à diviser la fonction coût par presque  $10^5$ . Si cela signifie que la hauteur d'eau au point  $(x_1, y_1)$  simulée avec la valeur identifiée du débit correspond assez bien aux observations, la valeur élevée de la fonction diagnostique montre que la solution globale reste très éloignée de celle de référence. Pour illustrer ce phénomène, la figure 3.7 représente l'évolution en fonction du temps de la hauteur d'eau simulée et de la hauteur d'eau

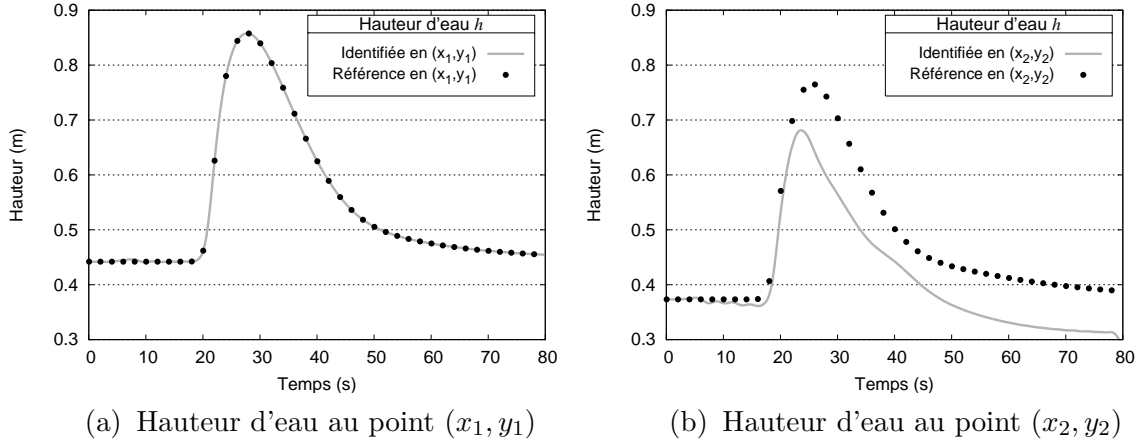


FIG. 3.7 – Identification du débit seulement avec coefficient de Manning modifié : hauteur d'eau simulée et mesures de référence au point d'observation  $(x_1, y_1)$  et au point  $(x_2, y_2)$ .

de référence au point d'observation  $(x_1, y_1)$  ainsi qu'à un autre point du domaine  $(x_2, y_2) = (30, 6)$ . La hauteur d'eau obtenue avec le débit identifié est tracée en traits pleins gris tandis que celle de la solution de référence est représentée avec des points noirs. On observe une bonne correspondance au point d'observation  $(x_1, y_1)$  où a été calculée la fonction coût. En revanche, on note un écart sensible entre les deux courbes au point  $(x_2, y_2)$  dans les deux derniers tiers de la simulation. Cela confirme que la solution globale n'est pas bonne et donc que l'identification du débit n'est pas satisfaisante.

### Identification du débit et du coefficient de Manning

Dans l'expérience précédente, le coefficient de Manning utilisé pour l'identification du débit ne correspondait pas à la valeur de référence qui avait servi à la création des observations. Sa valeur a été fixée *a priori* à  $n^0 = 0.02$  et l'on a obtenu une mauvaise identification du débit.

Pour essayer d'améliorer le résultat, il semble naturel de chercher à identifier conjointement le débit et le coefficient de Manning. C'est ce que nous allons faire dans cette expérience. Nous utilisons pour cela une fonction coût semblable à  $j_1$  dans le sens où elle mesure la même quantité ; elle en diffère cependant car on la fait dépendre du coefficient de Manning  $n$  en plus du débit  $\bar{q}$  :

$$j_2(\bar{q}, n) = \frac{1}{2} \int_0^T |h(x_1, y_1, t) - h^{obs}(t)|^2 dt . \quad (3.6)$$

On cherche le coefficient de Manning dans la classe des fonctions constantes par morceaux sur les sous-domaines définis par :

$$\begin{aligned}\Omega_1 : 0 \leq x < 25 & \quad \Omega_2 : 25 \leq x < 50 \\ \Omega_3 : 50 \leq x < 75 & \quad \Omega_4 : 75 \leq x \leq 100 .\end{aligned}$$

Le résultat est présenté sur la figure 3.6 (c). On remarque que la valeur du débit identifié est sous-estimée par rapport à celle de référence, contrairement à l'expérience précédente où elle était surestimée. Les oscillations sont toujours présentes sur les 10 premières secondes de simulation, mais leur amplitude est plus importante. Le coefficient de Manning identifié est quant à lui représenté sur la figure 3.8 en fonction de la variable d'espace  $x$ . Ce dernier est très éloigné de la valeur de

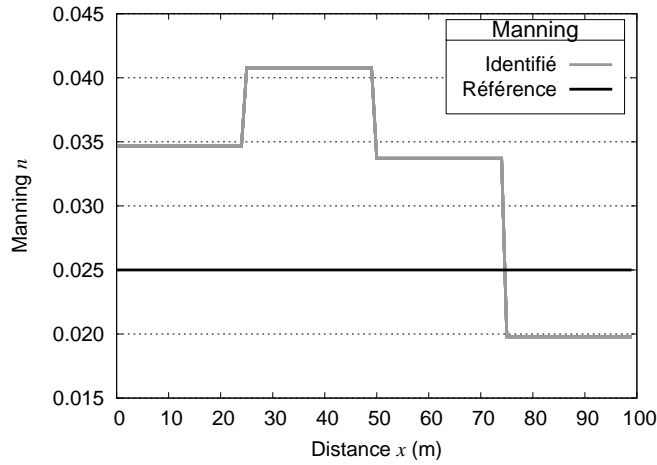


FIG. 3.8 – Identification du débit et du coefficient de Manning en utilisant des mesures de hauteur d'eau seulement : valeur identifiée du coefficient de Manning (trait grisé) et valeur de référence (trait noir).

référence  $n^{ref} = 0.025$ . Il est en particulier largement surestimé dans les trois premiers quarts du domaine. La qualité de l'identification des deux paramètres est mauvaise, ce que vient confirmer la valeur de la fonction diagnostique  $j_{diag}$  qui n'a été diminuée que de 20% par rapport à sa valeur initiale. Cependant, on peut faire la même remarque que dans l'expérience précédente concernant la convergence de la fonction coût : celle-ci a été raisonnablement bien minimisée malgré la mauvaise qualité globale de l'identification.

### 3.3.4 Conclusion

Dans les trois expériences d'assimilation de données présentées dans cette partie, la fonction coût a chaque fois été correctement minimisée, que ce soit pour l'identi-

fication du débit seul ou pour l'identification conjointe du débit et du coefficient de Manning. Dans un sens, chaque expérience a réussi puisque le vecteur de contrôle identifié conduit à une simulation dans laquelle la hauteur d'eau correspond parfaitement aux observations. Cependant, si l'on prend en compte l'écoulement dans sa globalité, nous avons vu que seule la première expérience a réellement donné un résultat satisfaisant. Dans ce cas, le débit de l'écoulement était la seule variable modifiée par rapport à la configuration de référence. Dans les deux autres expériences où le coefficient de Manning était également modifié, nous ne sommes pas parvenus à retrouver le débit de référence, que l'on prenne ou pas en compte le Manning dans le problème d'identification.

Nous avons montré un exemple dans lequel le manque d'information sur le système pèse sur la qualité de la simulation. Comme nous allons le voir dans le chapitre 5, on peut améliorer la situation en apportant plus d'observations dans le processus d'assimilation de données. La même configuration sera reprise en ajoutant la prise en compte d'observations lagrangiennes de trajectoires de particules.



## Chapitre 4

# Principes de l'assimilation de trajectoires

Nous avons vu au chapitre précédent des exemples de problèmes d'assimilation de données dans lesquels des observations de hauteur d'eau, utilisées seules, ne sont pas suffisantes pour permettre une identification satisfaisante des paramètres d'un modèle Saint-Venant. Par ailleurs, les contraintes liées aux techniques usuelles de mesure *in situ* de la vitesse dans le cours d'eau conduisent à envisager d'autres sources d'observation.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons en particulier à l'information supplémentaire que peut apporter l'observation à distance de particules transportées à la surface de l'écoulement. Plus précisément, nous considérons comme observations les trajectoires de telles particules.

En océanographie, l'utilisation de l'information que constituent des séries chronologiques de positions de bouées dérivantes dans l'océan a été étudiée dans un cadre d'assimilation de données à partir des années 1990. On peut noter en particulier Carter [16] qui a utilisé le filtre de Kalman sur un modèle *shallow water* du Gulf Stream. Kamachi et O'Brien [51], toujours avec un modèle *shallow water*, ont été les premiers en 1995 à utiliser une méthode variationnelle pour assimiler des données de type trajectoire, afin d'identifier l'épaisseur initiale de la couche supérieure. Plus récemment, Nodet [69, 70] a développé cette méthode variationnelle pour l'identification de la condition initiale d'un modèle d'océan basé sur les équations primitives (OPA). D'autres études ont plutôt employé la méthode du filtre de Kalman d'Ensemble [54, 82].

Nous présentons ici l'assimilation de trajectoires de particules transportées à la surface de l'eau, à l'aide d'une méthode variationnelle, dans le contexte de la simulation d'une section de rivière par les équations de Saint-Venant bidimensionnelles.

On exposera dans un premier temps le type de données considérées et le principe de la méthode, puis on présentera le modèle ainsi que sa discrétisation et sa mise en œuvre au sein du logiciel Dassflow. On proposera également une méthode simple de filtrage des observations de trajectoires afin d'améliorer l'assimilation de données réelles.

## 4.1 Données lagrangiennes

La trajectoire d'une particule entraînée par le courant à la surface de l'écoulement contient de l'information sur la dynamique de ce dernier. L'observation d'une telle trajectoire peut ainsi apporter une certaine connaissance sur la vitesse de l'écoulement.

La figure 4.1 présente de manière schématique la trajectoire d'une particule située au point  $x^0$  au temps initial  $t^0$ . Cette trajectoire est constituée de toutes les positions successives que prend la particule au cours du temps. On note  $X(x^0, t^0; t)$  sa position au temps  $t$ .

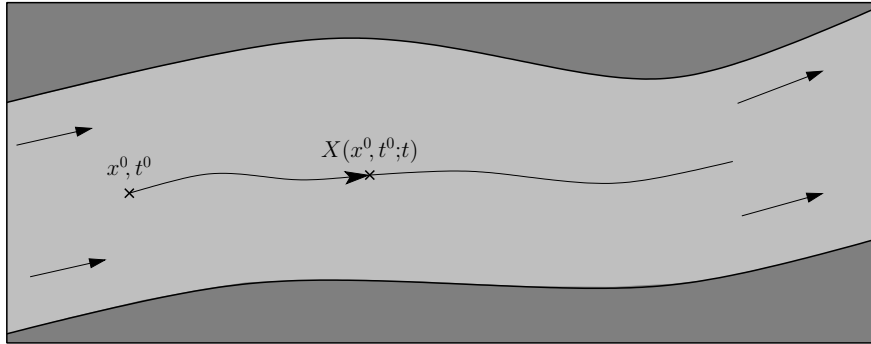


FIG. 4.1 – Trajectoire d'une particule à la surface d'un écoulement.

À l'inverse d'une vitesse ou d'une hauteur d'eau mesurée par une sonde placée à un endroit fixé à l'avance dans le cours d'eau, l'information portée par une trajectoire de particule concerne un point de position variable dans le temps. On dira que l'information mesurée par la sonde est de nature eulérienne, celle véhiculée par une particule sera de nature lagrangienne.

On utilisera donc des observations de trajectoires de particules comme données supplémentaires aux observations traditionnelles de hauteur d'eau et de vitesse eulérienne. Plus précisément, on considérera pour les problèmes d'assimilation la série chronologique des positions  $X_i^{obs}(t)$  d'un ensemble de  $N_p$  particules.

En pratique, on peut envisager différents moyens d'observation des trajectoires, en fonction des échelles spatiales et temporelles auxquelles on situe l'observation. Sans entrer dans le détail de leur mise en œuvre, imaginons deux pistes potentielles pour la construction d'un système d'observation :

- échelle locale : observation d'une petite portion du domaine à l'aide par exemple d'une caméra vidéo située au-dessus de l'écoulement. L'extraction de la position de traceurs lagrangiens, image par image à partir d'une séquence vidéo peut permettre de reconstituer des trajectoires locales avec une densité potentiellement importante à la fois en espace et en temps.
- grande échelle : suivi de traceurs par des moyens de télédétection, par exemple de petits flotteurs équipés de capteurs GPS. Cela permet d'envisager une couverture d'observation à une échelle beaucoup plus large à la fois en espace et sur des durées plus longues, au détriment d'une densité moins grande.

Du point de vue de la modélisation, ces deux approches diffèrent uniquement par l'échelle d'observation considérée. La représentation des données dans le modèle d'écoulement est abordée de la même manière dans les deux cas.

## 4.2 Modèle de transport

L'assimilation des observations de trajectoires de particules nécessite leur prise en compte par le modèle d'écoulement Saint-Venant. Afin de construire une fonction coût mesurant la distance entre les observations et les variables d'état du modèle, sur le même principe que pour la prise en compte des observations eulériennes classiques, une représentation numérique des trajectoires au sein du modèle est créée. Pour cela, le vecteur d'état composé de la hauteur d'eau  $h$  et du débit local  $\mathbf{q}$  va être *étendu* par des composantes additionnelles représentant la position de particules numériques, ou particules modèles.

### 4.2.1 Équation de transport

On considère donc un ensemble de  $N_p$  particules modèles, dont les positions au cours du temps à l'intérieur d'un domaine ouvert  $\Omega$  sont notées  $X_i(t)$  pour  $i = 1, \dots, N_p$ . Leur évolution est régie par le système d'équations de transport suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } i = 1, \dots, N_p : \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt} X_i(t) &= \mathbf{v}(X_i(t), t) & \forall t \in ]t_i^0, t_i^f[ \\ X_i(t_i^0) &= x_i^0 \end{array} \right. \end{array} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse par lequel sont transportées les particules et  $x_i^0 \in \Omega$  est le point de départ à l'instant  $t_i^0$ . Pour une particule  $i$  donnée,  $t_i^0$  et  $t_i^f$  sont les temps auxquels celle-ci entre et sort du domaine d'observation  $\Omega$ . Ils sont tous deux compris dans un intervalle  $[0, T]$ . Ainsi, l'ensemble  $\{X_i(t)\}_{t \in [t_i^0, t_i^f]}$  constitue la trajectoire de la particule modèle numéro  $i$ .

Si la fonction  $\mathbf{v} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue sur  $\Omega \times [0, T]$  et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace, alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, chaque équation différentielle du système (4.1) admet une unique solution :

$$\begin{aligned} X_{x_i^0, t_i^0} : [t_i^0, t_i^f[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\longmapsto X_i(x_i^0, t_i^0; t), \end{aligned}$$

en notant  $X_i(x_i^0, t_i^0; t)$  la position au temps  $t$  de la particule se trouvant à la position initiale  $x_i^0$  au temps  $t_i^0$ .

### 4.2.2 Vitesse de transport

Dans le système d'équations précédent, la vitesse  $\mathbf{v}$  de transport des particules doit être définie. Si l'on suppose que les particules sont suffisamment petites pour ne pas avoir d'influence sur l'écoulement et qu'elles n'interagissent pas entre elles, la vitesse  $\mathbf{v}$  correspond idéalement à la vitesse de surface de l'écoulement.

Si l'on considère le cas d'un écoulement dans un canal à fond plat avec friction, la vitesse de surface, que l'on note  $\tilde{\mathbf{u}}^s$ , est généralement différente de la vitesse  $\mathbf{u}$  du modèle Saint-Venant. Cette dernière correspond à la vitesse moyenne intégrée sur la verticale du domaine fluide. La figure 4.2 représente de manière schématique une coupe verticale du domaine physique avec la vitesse du fluide en fonction de la hauteur  $z$  dans l'écoulement. Dans cette configuration, la vitesse de surface  $\tilde{\mathbf{u}}^s$  est supérieure à la vitesse du modèle  $\mathbf{u}$ . Dans le cas général, un certain nombre de facteurs comme les variations de topographie du fond, le frottement dû à l'air et au vent, viennent perturber cette représentation.

Dans la suite, néanmoins, la vitesse de transport  $\mathbf{v}$  utilisée dans le système (4.1) sera définie comme un multiple de la vitesse du modèle d'écoulement :  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$ . La valeur du coefficient  $\gamma$  reste à déterminer en fonction de la configuration hydraulique.

Cette modélisation de la vitesse de surface ne prend pas en compte un certain nombre de phénomènes physiques présents dans les écoulements réels qui ne rentrent pas dans les hypothèses habituelles des équations de Saint-Venant en eaux peu profondes. Au nombre de ces phénomènes physiques [68], on peut noter la turbulence et les tourbillons de surface, les courants secondaires, les recirculations, etc.

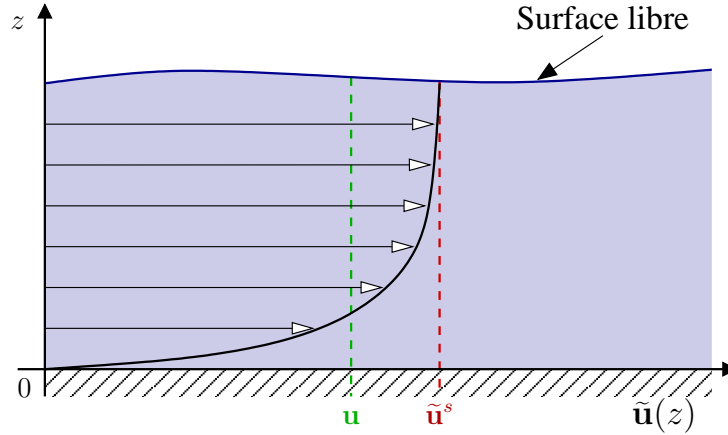


FIG. 4.2 – Profil de vitesses de l'écoulement sur une coupe verticale du domaine fluide.

### 4.2.3 Intégration au modèle général

Dans ce paragraphe, nous allons écrire le couplage entre le modèle d'écoulement Saint-Venant (2.4)–(2.5) décrit dans la partie 2.1 et le système de transport (4.1) en utilisant la définition de la vitesse de transport  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$ . Celle-ci dépend directement de la vitesse  $\mathbf{u}$  du modèle Saint-Venant, qui n'est cependant pas dépendante de la trajectoire des particules dans le modèle de transport proposé. Ainsi, le modèle de transport est faiblement couplé avec le modèle d'écoulement Saint-Venant.

En reprenant le formalisme concernant le couplage faible de modèles introduit dans la partie 1.2.7 page 22, on peut écrire le modèle de transport (4.1) sous la même forme que le système (1.22) en considérant que la variable transportée  $\phi$  et l'opérateur de transport  $G$  sont des vecteurs de dimension  $N_p$  en notant :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \{\phi_i(t)\}_{i=1,\dots,N_p} \\ G(w(t), y(t); \phi(t)) &= \left\{ G_i(w(t), y(t); \phi_i(t)) \right\}_{i=1,\dots,N_p}\end{aligned}$$

et en substituant les notations de la partie 1.2.7 par celles introduites précédemment :

$$\begin{aligned}w &= \gamma \\ \phi_i^0 &= x_i^0 \\ \phi_i(t) &= X_i(t) \\ G_i(w(t), y(t); \phi_i(t)) &= \begin{cases} -\gamma(X_i(t)) \mathbf{u}(X_i(t), t) & \forall t \in ]t_i^0, t_i^f[ \\ 0 & \forall t \in ]0, t_i^0[ \cup ]t_i^f, T[ \end{cases}\end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur  $\gamma$  est défini comme une fonction de la variable d'espace, ce que l'on note par  $\gamma(x)$ . Dans l'équation de transport (4.1), sa valeur est évaluée à la position de la particule  $i$  au temps  $t$ .

Le caractère *faible* du couplage entre les deux modèles permet de séparer les calculs et de résoudre le modèle de transport une fois la solution du modèle d'écoulement connue. Ainsi, le système couplé modèle Saint-Venant – modèle de transport des particules s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{q} + \operatorname{div}(\frac{1}{h} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + \frac{1}{2} g \nabla h^2 + gh \nabla z_b + g \frac{n^2 \|\mathbf{q}\|}{h^{7/3}} \mathbf{q} = 0 \\ \text{C.I. } h(0) = h^0, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0. \\ \text{C.L. } (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_q} = -\bar{q}, \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_w} = 0, \\ (\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{q})|_{\Gamma_t} = 0, \quad (\partial_{\mathbf{n}} h)|_{\Gamma_q \cup \Gamma_w \cup \Gamma_t} = 0, \\ h|_{\Gamma_z} = \bar{z}_s - z_b|_{\Gamma_z}, \quad \partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + 2c)|_{\Gamma_z} = 0, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Pour  $i = 1, \dots, N_p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} X_i(t) = \gamma(X_i(t)) \mathbf{u}(X_i(t), t) \quad \forall t \in ]t_i^0, t_i^f[ \\ X_i(t_i^0) = x_i^0. \end{array} \right.$$

#### 4.2.4 Fonction coût et système adjoint

Nous proposons dans ce chapitre d'assimiler des observations de trajectoires de particules  $X_i^{obs}(t)$  que l'on suppose continues en temps afin de simplifier l'exposé de la méthode. La trajectoire numéro  $i$  est observée entre les temps  $t_i^0$  et  $t_i^f$  et l'on définit la position initiale de la particule modèle numéro  $i$  dans l'équation de transport (4.1) par  $x_i^0 = X_i^{obs}(t_i^0)$ .

La prise en compte de ces observations de trajectoires dans le processus d'assimilation de données passe par l'ajout d'un terme supplémentaire à la fonction coût introduite dans la partie 2.2. Nous en donnons un exemple générique ici :

$$\begin{aligned} j(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\| Ch(t) - h^{obs}(t) \right\|^2 dt \\ &+ \frac{\alpha_t}{2} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} |X_i(t) - X_i^{obs}(t)|_{\mathcal{O}_h}^2 dt + \frac{\alpha_p}{2} \|Dz_b\|_D^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{k} = (h_0, \mathbf{q}_0, n, z_b, \bar{q}, \bar{z}_s)$  est le vecteur de contrôle défini dans la partie 2.2,  $\alpha_t$  est un paramètre d'échelle,  $C$  un opérateur d'observation qui projette la variable de hauteur du modèle dans l'espace des observations eulériennes et  $D$  un opérateur différentiel, comme un gradient ou un laplacien par exemple. Le premier terme mesure la différence entre les observations de hauteur d'eau et la variable d'état. Le second terme mesure la distance entre les positions des particules observées et celles de leurs homologues du modèle. Enfin, le dernier est un terme de régularisation sur la variation de topographie.

En utilisant le formalisme développé dans le chapitre 1 pour le couplage faible de modèles, il est aisé d'écrire le système couplé adjoint. La variable adjointe  $\tilde{\phi}$  est alors remplacée par le vecteur  $\tilde{X}$  de composantes  $\tilde{X}_i$  et les termes présents dans le système d'optimalité (1.25) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \right]^* \tilde{\phi}(t) &= - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\gamma(X_i(t))}{h(X_i(t), t)} \left( \left\langle \mathbf{u}(X_i(t), t), \tilde{X}_i(t) \right\rangle \right) \\ \left[ \frac{\partial G_i}{\partial \phi_i} \right]^* \tilde{\phi}_i(t) &= -\gamma(X_i(t)) \left[ \nabla \mathbf{u}(X_i(t), t) \right]^T \tilde{X}_i(t) - \left[ \nabla \gamma(X_i(t)) \otimes \mathbf{u}(X_i(t), t) \right] \tilde{X}_i(t) \\ \left[ \frac{\partial G}{\partial w} \right]^* \tilde{\phi}(t) &= - \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} \left\langle \mathbf{u}(X_i(t), t), \tilde{X}_i(t) \right\rangle dt . \end{aligned}$$

Les autres termes ont été décrits en détails dans le chapitre 2. On a donc pour la fonction coût générique définie en (4.3) le système adjoint couplé suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i = 1, \dots, N_p \\ &\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \tilde{X}_i(t) + \gamma(X_i(t)) \left[ \nabla \mathbf{u}(X_i(t), t) \right]^T \tilde{X}_i(t) \\ &\quad + \left[ \nabla \gamma(X_i(t)) \otimes \mathbf{u}(X_i(t), t) \right] \tilde{X}_i(t) \\ &\quad = \alpha_t (X_i(t) - X_i^{obs}(t)) \quad \forall t \in ]t_i^0, t_i^f[ \\ &\tilde{X}_i(t) = 0 \quad \forall t \in ]0, t_i^0] \cup [t_i^f, T[ \end{aligned} \right. \\ &\left\{ \begin{aligned} &\partial_t \tilde{h}(t) - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{q}}] \cdot \mathbf{u} + gh \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad - g \tilde{\mathbf{q}} \cdot \nabla z_b + \frac{7}{3} g \frac{n^2 \|\mathbf{u}\|}{h^{4/3}} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \frac{\gamma}{h} \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{u} \cdot \tilde{X}_i(t) = C^T (Ch(t) - h^{obs}(t)) \quad \forall t \in ]0, T[ \\ &\partial_t \tilde{\mathbf{q}}(t) + \nabla \tilde{h} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{q}} + (\nabla \tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{u} - g \frac{n^2 \|\mathbf{u}\|}{h^{4/3}} \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - g \frac{n^2}{h^{4/3} \|\mathbf{u}\|} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\gamma}{h} \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{X}_i(t) = 0 \quad \forall t \in ]0, T[ \\ &\text{C.I} \quad \tilde{h}(T) = 0, \quad \tilde{\mathbf{q}}(T) = 0, \\ &\text{C.L} \quad \tilde{\mathbf{q}}|_{\Gamma_q} = 0, \quad (\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_w} = 0, \quad \tilde{\mathbf{q}}|_{\Gamma_t} = 0, \quad (\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_z} = 0, \\ &\quad (\partial_{\mathbf{n}} \tilde{h})|_{\Gamma_q \cup \Gamma_w} = 0, \quad \tilde{h}|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left( \tilde{h} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) \right)|_{\Gamma_z} = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Tout comme le système direct, ce système adjoint est composé de deux systèmes faiblement couplés. Cependant, la direction du couplage est inversée par rapport au système direct : la variable d'état des équations de Saint-Venant adjointes dépend de la variable d'état des équations de transport adjointes. D'un point de vue pratique, on résoudra donc ces dernières en premier.

L'expression des dérivées partielles de la fonction coût  $j$  par rapport aux composantes de la variable de contrôle  $\mathbf{k}$  n'est pas modifiée par rapport à celle qui est donnée dans le cas du modèle Saint-Venant simple décrit dans la partie 2.2. Si l'on ajoute le coefficient  $\gamma$  à la liste des variables de contrôle, la dérivée partielle de  $j$  par rapport à cette dernière s'écrit de manière formelle de la façon suivante :

$$\frac{\partial j}{\partial \gamma}(\mathbf{k}) = - \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} \left\langle \mathbf{u}(X_i(t), t), \tilde{X}_i(t) \right\rangle dt .$$

### 4.3 Discrétisation numérique des trajectoires

Dans cette partie, nous allons présenter la mise en œuvre numérique du modèle de transport présenté précédemment. Pour des raisons de simplicité, nous limiterons cette mise en œuvre à des domaines  $\Omega$  rectangulaires et à des maillages structurés utilisant des quadrangles.

Par ailleurs, pour la présentation du schéma numérique, on considérera une unique particule lâchée à l'instant  $t^0$  au point  $x^0$  et transportée par un champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , ce qui permettra d'omettre l'indice  $i$  sur les variables.

#### 4.3.1 Discrétisation en temps

Dans un premier temps, présentons la discrétisation en temps d'une équation différentielle du système (4.1) décrivant l'évolution au cours du temps de la position d'une particule. Pour cela, on introduit une subdivision  $(t^n)_n$  de l'intervalle  $[t^0, t^f]$  telle que  $t^{n+1} > t^n$  pour tout  $n$  et  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . En intégrant l'équation de transport entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  on obtient :

$$X(x^0, t^0; t^{n+1}) = X(x^0, t^0; t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{v}(X(x^0, t^0; s), s) ds . \quad (4.5)$$

Les positions de la particule aux temps  $t^n$ ,  $s$  et  $t^{n+1}$  sont représentées dans un repère espace-temps sur la figure 4.3. Dans la suite, on notera  $X^n = X(x^0, t^0; t^n)$ .

On utilise un schéma d'intégration de type Runge-Kutta d'ordre 2 pour calculer une approximation de ces positions : le schéma dit de Heun. Nous allons justifier



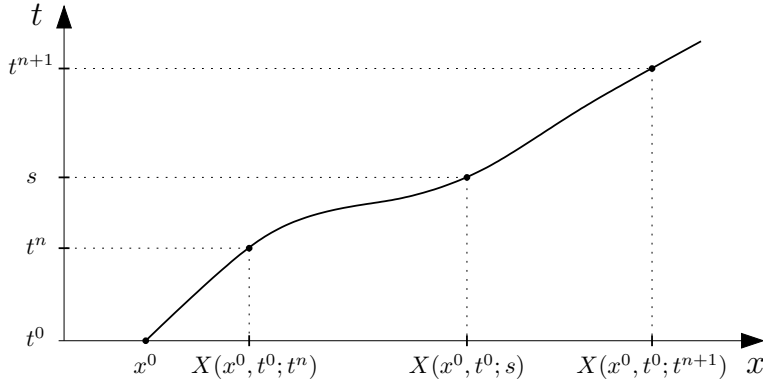


FIG. 4.3 – Vue dans un repère espace-temps de la trajectoire d’une particule transportée par un champ de vitesse  $\mathbf{v}$ .

ce choix. La discrétisation de l’équation (4.5) par le schéma Runge-Kutta d’ordre 1 explicite (Euler explicite) s’écrit :

$$\text{Euler} : X^{n+1} = X^n + \Delta t^n \mathbf{v}(X^n, t^n) + O((\Delta t^n)^2) .$$

À l’ordre 2, plusieurs schémas Runge-Kutta explicites sont envisageables. On va s’intéresser à deux d’entre eux, le schéma dit de Heun et celui du point milieu (PM). Ce dernier fait intervenir la valeur de la vitesse  $\mathbf{v}$  au pas de temps  $t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t^n$ . En posant  $k_1 = \mathbf{v}(X^n, t^n)$ , ces deux schémas s’écrivent de la manière suivante :

$$\text{Heun} : X^{n+1} = X^n + \frac{1}{2}\Delta t^n \left( k_1 + \mathbf{v}(X^n + \Delta t^n k_1, t^{n+1}) \right) + O((\Delta t^n)^3) ,$$

$$\text{PM} : X^{n+1} = X^n + \Delta t^n \mathbf{v}\left(X^n + \frac{1}{2}\Delta t^n k_1, t^{n+\frac{1}{2}}\right) + O((\Delta t^n)^3) .$$

Le schéma de Runge-Kutta d’ordre 4 le plus couramment utilisé s’écrit :

$$\text{RK4} : X^{n+1} = X^n + \frac{1}{6}\Delta t^n (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O((\Delta t^n)^5) ,$$

en posant

$$\begin{aligned} k_1 &= \mathbf{v}(X^n, t^n) , & k_2 &= \mathbf{v}\left(X^n + \frac{1}{2}\Delta t^n k_1, t^{n+\frac{1}{2}}\right) , \\ k_3 &= \mathbf{v}\left(X^n + \frac{1}{2}\Delta t^n k_2, t^{n+\frac{1}{2}}\right) , & k_4 &= \mathbf{v}(X^n + \Delta t^n k_3, t^{n+1}) . \end{aligned}$$

Cependant, lorsque le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  n’est connu que de manière discrète aux pas de temps  $(t^n)_n$ , il faut effectuer une interpolation pour obtenir une approximation de sa valeur au temps  $t^{n+\frac{1}{2}}$ . Si l’on utilise une interpolation linéaire, c’est-à-dire :

$$\mathbf{v}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) \approx \mathbf{v}_n^*(x) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{v}(x, t^n) + \mathbf{v}(x, t^{n+1}) \right) , \quad (4.6)$$

une erreur d'ordre 1 est commise. En effet, en effectuant des développements de Taylor autour du temps  $t^{n+\frac{1}{2}}$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x, t^n) &= \mathbf{v}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t^n}{2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t^n)^3) , \\ \mathbf{v}(x, t^{n+1}) &= \mathbf{v}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t^n}{2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t^n)^3) ,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que :

$$\mathbf{v}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) = \mathbf{v}_n^*(x) + O((\Delta t^n)^2) . \quad (4.7)$$

Ainsi, si l'on utilise l'approximation (4.6) pour la valeur du champ de vitesse au temps  $t^{n+\frac{1}{2}}$  dans le schéma d'intégration RK4, on y introduit un terme en  $O((\Delta t^n)^3)$ . Par conséquent, on obtient un schéma précis à l'ordre 2 seulement. Il ne sert donc à rien d'utiliser une méthode d'intégration en temps d'ordre élevé si l'on ne dispose pas d'une approximation suffisamment précise du champ de vitesse au temps  $t^{n+\frac{1}{2}}$ .

Le problème est moindre avec le schéma PM puisque le terme d'erreur introduit par l'interpolation est du même ordre que l'erreur de troncature du schéma. D'autre part, la méthode de Heun ne présente pas cet inconvénient de nécessiter l'interpolation du champ de vitesse. Nous choisirons donc cette dernière par la suite.

Par ailleurs, le champ de vitesses  $\mathbf{v}$  est issu de la solution des équations de Saint-Venant résolues par un schéma volumes finis précis à l'ordre 1 en temps et en espace ; le choix d'un schéma d'ordre supérieur à 2 pour l'intégration des trajectoires ne se justifie donc pas.

### 4.3.2 Discrétisation en espace

Pour calculer la position des particules à l'aide du schéma numérique décrit dans le paragraphe précédent, il faut connaître la vitesse de transport  $\mathbf{v}$  en un point quelconque du domaine  $\Omega$ . Or, dans le cas qui nous préoccupe, ce champ de vitesse n'est connu qu'à partir de sa valeur moyenne sur les volumes de contrôle du schéma volumes finis. Il faut donc recourir à une interpolation.

Dans cette partie nous présentons donc un schéma d'interpolation pour un champ scalaire  $\varphi$  quelconque en un point  $P = (p_x, p_y)$  du domaine  $\Omega$ . Une partie du maillage structuré, rectangulaire et régulier du domaine est représentée sur la figure 4.4. On suppose que le champ scalaire  $\varphi$  est connu par sa valeur moyenne sur chaque maille rectangulaire :

$$\varphi_{j,k} = \frac{1}{|K_{j,k}|} \int_{K_{j,k}} \varphi(x, y) \, dx \, dy ,$$

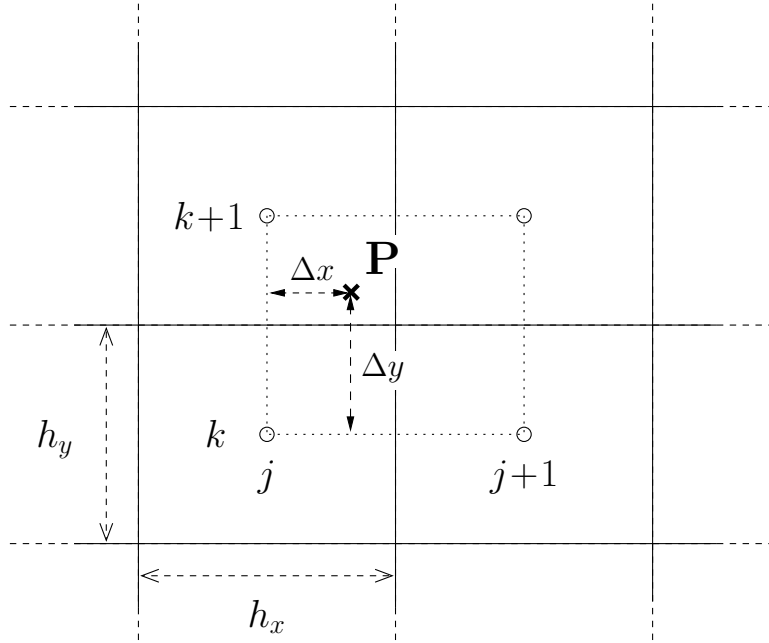


FIG. 4.4 – Grille d'interpolation en espace du champ de vitesse sur un maillage structuré, rectangulaire et structuré.

où  $|K_{j,k}| = h_x \times h_y$  est la surface de la maille centrée sur le point d'indices  $(j, k)$ . Avec les notations de la figure 4.4, on utilise le schéma d'interpolation Q1-Lagrange suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_P = \frac{1}{h_x h_y} & \left( (h_x - \Delta x)(h_y - \Delta y) \varphi_{j,k} + \Delta x \Delta y \varphi_{j+1,k+1} \right. \\ & \left. + \Delta x (h_y - \Delta y) \varphi_{j+1,k} + (h_x - \Delta x) \Delta y \varphi_{j,k+1} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ce schéma est d'ordre 2 en espace si le champ  $\varphi$  est suffisamment régulier. Plus précisément, on montre à l'aide de développements de Taylor de  $\varphi$  autour du point  $P$  que :

$$\begin{aligned} \varphi_P = \varphi(p_x, p_y) & + \frac{1}{2} \Delta x (h_x - \Delta x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(p_x, p_y) \\ & + \frac{1}{2} \Delta y (h_y - \Delta y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(p_x, p_y) \\ & + o(\Delta x^2; \Delta y^2; h_x^2; h_y^2) . \end{aligned}$$

Or les longueurs  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont bornées par  $h_x$  et  $h_y$  respectivement, ce qui permet d'écrire que  $\Delta x = O(h_x)$  et  $\Delta y = O(h_y)$ . Ainsi, on conclut que le schéma d'interpolation (4.8) est d'ordre 2 :

$$\varphi_P = \varphi(p_x, p_y) + O(h_x^2; h_y^2)$$

Ce schéma est utilisé pour calculer une approximation de chaque composante de la vitesse  $\mathbf{v}$  en un point quelconque du domaine de calcul.

## 4.4 Filtrage des observations de trajectoires

Lorsque l'on considère des écoulements réels, la surface libre est perturbée par des phénomènes physiques qui ne sont pris en compte ni dans les équations de Saint-Venant, ni dans le modèle de transport. Les observations de trajectoires de particules peuvent donc souffrir d'un défaut de représentativité dans le modèle couplé. Par ailleurs, le système d'acquisition des observations est également une source d'erreur de mesure. Par exemple, dans le cas de l'acquisition de données par un système vidéo, la pixellisation de l'image entraîne une quantification des données de position qui peut devenir une source prépondérante d'erreur d'observation si la résolution de la caméra est faible.

Cependant, si un grand nombre de trajectoires observées est disponible, il est envisageable de les filtrer afin de tenter de supprimer l'information relative aux petites échelles de l'écoulement ainsi qu'une partie des erreurs de mesure. C'est ce que nous proposons dans cette partie. Ceci passe par la reconstruction de trajectoires filtrées à partir de champs de vitesse moyennés sur des fenêtres spatio-temporelles. Une étape préliminaire consiste à rééchantillonner les trajectoires pour que leur fréquence d'observation corresponde au pas de temps de la simulation.

### 4.4.1 Rééchantillonnage des observations

Le rééchantillonnage des observations de trajectoires consiste à interpoler les positions observées des particules sur les pas de temps de simulation du modèle d'écoulement. Cette opération permet de synchroniser les moments d'observation et les moments d'évaluation de la vitesse  $\mathbf{v}$  lors de l'intégration du modèle de transport pour faciliter celle-ci ainsi que le calcul de la fonction coût.

Afin de simplifier l'exposé de la méthode, on considère le cas où l'on dispose des observations d'une unique trajectoire, à des moments  $\sigma^{obs} = \{t_{obs}^0, t_{obs}^1, \dots, t_{obs}^M\}$ . On note cette trajectoire observée  $X^{obs}(t_{obs}^j)$  pour  $j = 0, \dots, M$ . Par ailleurs, le modèle d'écoulement est discrétisé en temps sur une subdivision régulière de l'intervalle  $[0, T]$  notée  $\sigma^c = \{t^0, t^1, \dots, t^N\}$  avec  $t^n = n\Delta t$ .

Dans le cas où les deux subdivisions ne sont pas identiques, c'est-à-dire lorsque les instants d'observation ne correspondent pas aux temps de calcul  $t^n$ , les trajectoires observées sont rééchantillonnées sur la subdivision  $\sigma^c$  pour obtenir une trajectoire que l'on note  $X^r(t^n)$  pour  $n = 0, \dots, N$ . Selon la densité relative d'observation par rapport au pas de temps de calcul, deux cas limites peuvent se présenter. Il sont représentés sur la figure 4.5. Dans le cas 1, la subdivision  $\sigma^c$  est plus fine que  $\sigma^{obs}$ . On choisit donc d'interpoler les trajectoires observées sur  $\sigma^c$ . Dans le cas 2, la subdivision  $\sigma^{obs}$  est plus fine que  $\sigma^c$ , c'est-à-dire que l'on dispose d'au moins

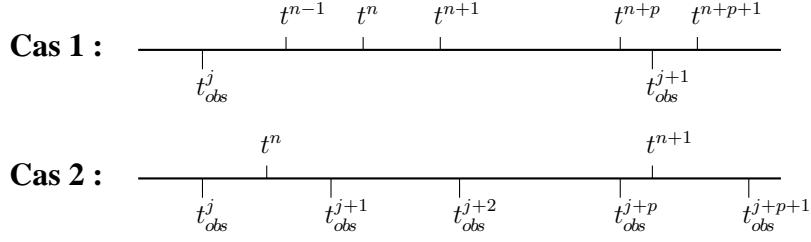


FIG. 4.5 – Rééchantillonnage des trajectoires : deux cas limites.

une observation par pas de temps de calcul. On choisit alors de définir la position  $X^r$  des particules sur la subdivision la plus grossière  $\sigma^c$  de manière à ce que la vitesse de la particule rééchantillonnée soit égale à la vitesse moyenne observée sur chaque intervalle  $[t^n, t^{n+1}]$ . Le schéma de rééchantillonnage décrit dans la suite prend en compte ces deux cas limites.

L'observation rééchantillonnée  $X^r(t^n)$  est définie pour tout temps  $t^n$  vérifiant  $t_{obs}^0 \leq t^n \leq t_{obs}^M$ . On construit alors la trajectoire avec le schéma suivant :

$$\begin{cases} X^r(t^n) &= X^{obs}(t_{obs}^0) + \Delta t \tilde{\mathbf{v}}^{n-1} & \text{pour } t_{obs}^0 \leq t^n < t_{obs}^1 \\ X^r(t^{n+1}) &= X^r(t^n) + \Delta t \tilde{\mathbf{v}}^n & \text{pour } t_{obs}^0 < t^n < t^{n+1} \leq t_{obs}^M, \end{cases}$$

où la vitesse  $\tilde{\mathbf{v}}^n$  de la particule sur l'intervalle de temps  $[t^n, t^{n+1}]$  est définie par :

$$\tilde{\mathbf{v}}^n = \sum_{j \in s^n} w_j^n \mathbf{v}_{obs}^j,$$

où  $s^n$  est l'ensemble des indices des temps d'observation  $t_{obs}^j$  qui sont pris en compte dans le calcul de la vitesse de la particule,  $\mathbf{v}_{obs}^j$  la vitesse observée sur l'intervalle de temps  $[t_{obs}^j, t_{obs}^{j+1}]$  et  $w_j^n$  son poids relatif dans le calcul de  $\tilde{\mathbf{v}}^n$ . Ces différentes quantités sont calculées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s^n &= \{ j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket / t_{obs}^j \leq t^{n+1} \text{ et } t_{obs}^{j+1} \geq t^n \}, \\ \mathbf{v}_{obs}^j &= \frac{X^{obs}(t_{obs}^{j+1}) - X^{obs}(t_{obs}^j)}{t_{obs}^{j+1} - t_{obs}^j}, \\ w_j^n &= \frac{1}{\Delta t} [\min(t_{obs}^{j+1}, t^{n+1}) - \max(t_{obs}^j, t^n)]. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les subdivisions  $\sigma^c$  et  $\sigma^{obs}$  sont identiques, on a bien sûr l'égalité  $X^r = X^{obs}$ . Nous serons par exemple dans cette situation pour les expériences jumelles présentées dans la suite. Afin de simplifier les notations, on désignera par  $X^{obs}$  une trajectoire observée, qu'elle soit rééchantillonnée ou pas.

#### 4.4.2 Construction d'une trajectoire filtrée

Le filtrage des observations de trajectoires est basé sur la reconstruction de trajectoires synthétiques à partir de champs de vitesse moyennée sur des fenêtres spatio-temporelles. Ces champs sont construits à partir des observations de trajectoires brutes ou rééchantillonnées. Pour simplifier l'écriture, on supposera dans cette partie que les trajectoires que l'on considère sont continues en temps.

Soit  $\{X_i^{obs}\}_{i=1, N_p}$  l'ensemble des trajectoires observées, qu'elles soient rééchantillonnées ou non. On cherche à créer un ensemble  $\{\bar{X}_j\}_{j=1, N_m}$  de trajectoires filtrées, construites à partir d'un champ de vitesse moyennée que l'on note  $\bar{\mathbf{v}}$ . Pour cela, il suffit d'intégrer en temps le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } j = 1, \dots, N_m : \\ &\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \bar{X}_j(t) = \bar{\mathbf{v}}(\bar{X}_j(t), t) \quad \forall t \in ]t_j^0, T[ \\ \bar{X}_j(t_j^0) = x_j^0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le point de départ  $x_j^0$  de la trajectoire filtrée  $j$  doit être défini en fonction des observations disponibles et de la configuration de l'écoulement.

La vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$  au temps  $t$  et au point  $\bar{X}_j(t)$ , que l'on note pour simplifier  $\bar{\mathbf{v}}_j(t) = \bar{\mathbf{v}}(\bar{X}_j(t), t)$ , est calculée comme la vitesse moyenne des observations sur une fenêtre spatio-temporelle  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_t \times \mathcal{W}_{\bar{X}_j(t)}$ . La fenêtre temporelle  $\mathcal{W}_t$  est un voisinage de

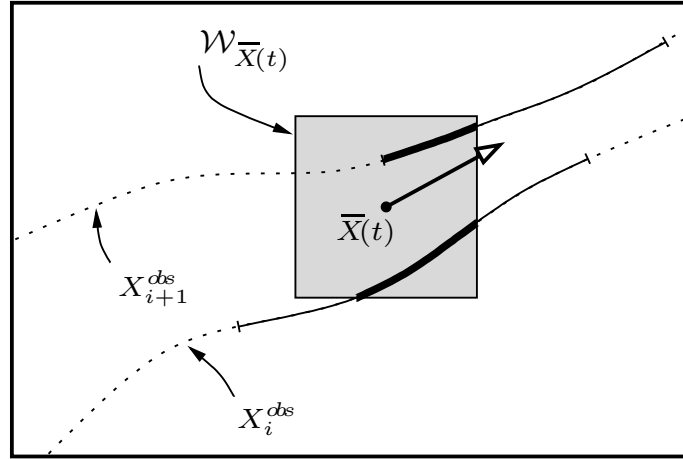


FIG. 4.6 – Fenêtre de filtrage spatio-temporelle pour la construction de trajectoires filtrées à partir d'observations.

$t$  et la fenêtre spatiale  $\mathcal{W}_{\bar{X}_j(t)}$  est un voisinage du point  $\bar{X}_j(t)$ . On définit alors la

vitesse  $\bar{\mathbf{v}}_j(t)$  de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{v}}_j(t) = \frac{1}{\mathbb{W}_j^t} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\mathcal{W}_t} \frac{d}{ds} X_i^{obs}(s) \mathbb{1}_{X_i^{obs}(s) \in \mathcal{W}_{\bar{X}_j(t)}} ds, \quad (4.10)$$

où

$$\mathbb{W}_j^t = \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\mathcal{W}_t} \mathbb{1}_{X_i^{obs}(s) \in \mathcal{W}_{\bar{X}_j(t)}} ds.$$

Sur la figure 4.6 est représentée une fenêtre de filtrage autour d'une particule de position  $\bar{X}$  à l'instant  $t$ . Les deux lignes en traits pointillés correspondent à des trajectoires observées, les traits pleins fins correspondent aux parties de trajectoires incluses dans la fenêtre temporelle, tandis que leur intersection avec la fenêtre spatiale, représentée par les traits pleins gras, correspondent aux morceaux de trajectoires qui sont pris en compte dans le calcul de la vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{v}}_j(t)$ .

### 4.4.3 Mise en œuvre numérique du filtrage

En pratique, l'intégration numérique du système (4.9) utilise la méthode présentée dans la partie 4.3. En ce qui concerne la discrétisation de l'équation (4.10) pour le calcul de la vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$ , on suppose que les observations ont été rééchantillonnées par la procédure présentée dans la partie 4.4.1. La vitesse instantanée d'une particule observée d'indice  $i$ , écrite  $\frac{d}{ds} X_i^{obs}(s)$  dans l'équation (4.10), est approchée numériquement au temps  $t^n$  par un schéma aux différences centré d'ordre 2 :

$$\left. \frac{d}{ds} X_i^{obs}(s) \right|_{t^n} \approx \frac{X_i^{obs}(t^{n+1}) - X_i^{obs}(t^{n-1})}{2\Delta t}.$$

Si l'on utilise une fenêtre de filtrage en temps  $\mathcal{W}_{t^n}$  centrée en  $t^n$  et de rayon  $q\Delta t$ , la vitesse moyenne discrète  $\bar{\mathbf{v}}_j$  au temps  $t^n$  s'écrit :

$$\bar{\mathbf{v}}_j^n = \frac{1}{2\Delta t \mathbb{W}_j^n} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{k=n-q}^{n+q} (X_i^{obs}(t^{k+1}) - X_i^{obs}(t^{k-1})) \mathbb{1}_{X_i^{obs}(t^k) \in \mathcal{W}_{\bar{X}_j^n}}, \quad (4.11)$$

où le poids  $\mathbb{W}_j^n = \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{k=n-q}^{n+q} \mathbb{1}_{X_i^{obs}(t^k) \in \mathcal{W}_{\bar{X}_j^n}}$  mesure le nombre de points d'observations présents dans la fenêtre spatio-temporelle  $\mathcal{W}$ .

## 4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode d'assimilation variationnelle de données lagrangiennes de trajectoires dans le cadre de la simulation en hydraulique fluviale. Les données lagrangiennes sont représentées dans le modèle comme la variable d'état d'un modèle de transport faiblement couplé avec le modèle d'écoulement. Par ailleurs, une méthode de filtrage des observations de trajectoires a été proposée dans le but d'améliorer l'assimilation de données réelles.

Le schéma numérique présenté dans la partie 4.3 a été codé dans le logiciel Dass-flow et le code adjoint correspondant a été produit. Le couplage avec le modèle d'écoulement a ensuite été effectué de manière à pouvoir à mettre en œuvre la méthode. Nous présentons dans le chapitre suivant des expériences d'assimilation de données utilisant des observations de trajectoires, synthétiques et réelles, pour l'identification de paramètres dans notre modèle d'écoulement Saint-Venant.



# Chapitre 5

## Expériences d'assimilation de trajectoires

Nous présentons dans ce chapitre des expériences numériques d'assimilation de données lagrangiennes utilisant la méthode variationnelle introduite dans le chapitre précédent. Dans une première partie, nous montrons la suite de la série d'expériences jumelles débutée dans le chapitre 3 et qui concernait l'identification conjointe du débit et du coefficient de Manning pour une configuration académique simple dans un canal. Nous étudions sur ce cas test ce qu'apporte l'ajout d'observations de trajectoires par rapport à de simples observations locales de hauteur d'eau. Une deuxième série d'expériences jumelles est ensuite consacrée à l'identification d'une topographie locale et des conditions initiales de l'écoulement, à partir d'observations de trajectoires bruitées. Le filtre décrit dans la partie 4.4 sera mis en œuvre. Enfin, nous présentons des résultats d'assimilation d'observations réelles de trajectoires dans un écoulement réalisé en laboratoire dans un canal. Les positions de particules lâchées dans l'écoulement sont extraites de prises de vues vidéo, filtrées, puis utilisées comme observations pour l'identification de plusieurs paramètres du modèle Saint-Venant.

### 5.1 Cas test : identification du débit et du coefficient de Manning

Cette partie est consacrée à des expériences jumelles d'assimilation de trajectoires qui font suite aux expériences présentées dans la partie 3.3. Nous avons montré que l'utilisation d'observations ponctuelles en espace et continues en temps de hauteurs d'eau pouvait être insuffisante pour l'identification du débit en condition

limite dans le cas où une autre variable de contrôle – le coefficient de Manning en l'occurrence – n'était connue que de manière approximative.

### 5.1.1 Configuration de l'expérience

Nous reprenons donc la même configuration que celle décrite page 67, en considérant cette fois-ci des observations additionnelles de trajectoires synthétiques. Le canal est rectangulaire de 100 m de long et 8 m de large, la topographie est définie par l'équation (3.3) et le coefficient de Manning de référence est constant sur le domaine  $n^{ref} = 0.025$ . Le débit de référence est défini par l'équation (3.4).

### 5.1.2 Observations de trajectoires

En plus des mesures de hauteur d'eau effectuées au point  $(x_1, y_1) = (40, 2)$  dans la configuration de référence, on crée des observations de trajectoires synthétiques en mesurant à chaque pas de temps la position de particules modèles lâchées dans l'écoulement. Au temps  $t = 0$  sont lâchées 48 particules uniformément réparties sur l'ensemble du domaine. Puis, toutes les 2.5 secondes et à 16 reprises, 8 particules uniformément réparties sur la largeur du domaine sont lâchées au point  $x = 5$  m. Au total,  $N_p = 176$  trajectoires synthétiques sont ainsi construites. On désigne la position au temps  $t$  de la particule observée numéro  $i$  par  $X_i^{obs}(t)$ . La figure 5.1 montre les trajectoires de six particules modèles lâchées dans l'écoulement

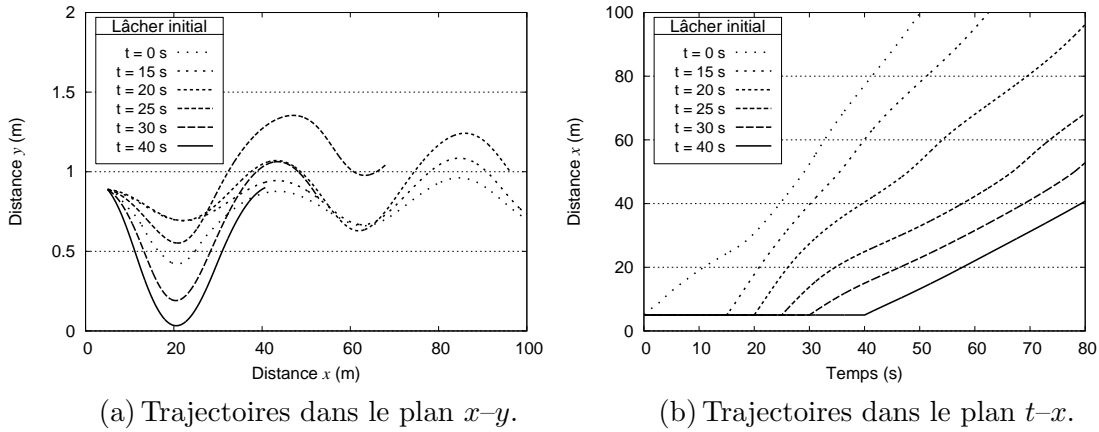


FIG. 5.1 – Identification conjointe du débit et du coefficient de Manning en utilisant des mesures de hauteur d'eau et des observations de trajectoires. Trajectoires synthétiques de référence de six particules lâchées dans l'écoulement au point  $(5, \frac{8}{9})$  à différent instants.

de référence au point  $(5, \frac{8}{9})$ . La figure de gauche les représente dans une partie du domaine spatial vue du dessus tandis que la figure de droite les représente dans un plan espace-temps où l'abscisse des particules est tracée en fonction du temps de simulation.

### 5.1.3 Résultats numériques

Nous allons présenter deux expériences d'assimilation de données pour l'identification conjointe du débit et du coefficient de Manning à partir des observations de hauteur d'eau et de trajectoires.

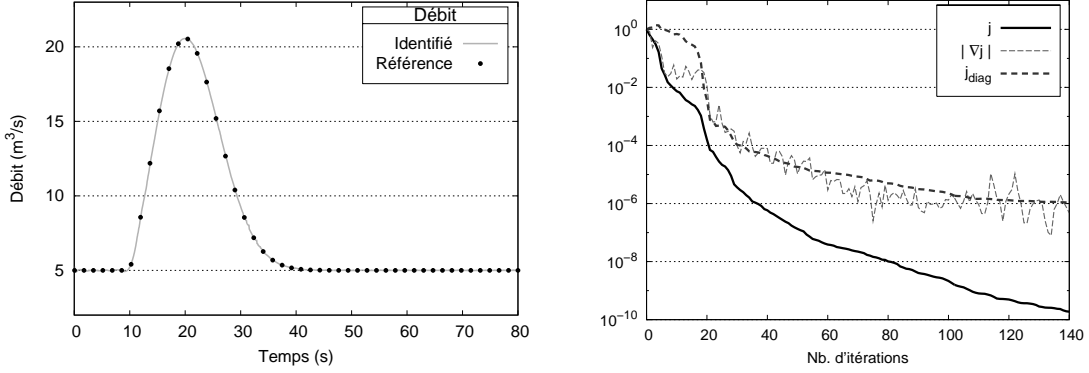
#### Expérience 1

La première expérience consiste à utiliser toutes les observations disponibles décrites dans la partie précédente. Les conditions sont les mêmes que dans la troisième expérience de la partie 3.3.3, présentée page 72. Mais le modèle inclut désormais le transport des particules et la fonction coût est modifiée en conséquence : afin de prendre en compte les observations de trajectoires, on ajoute à la fonction coût  $j_2$  définie en (3.6) un terme mesurant la distance entre les particules modèles et les particules observées pour obtenir :

$$j_3(\bar{q}, n) = \frac{1}{2} \int_0^T |h(x_1, y_1, t) - h^{obs}(t)|^2 dt + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} |X_i(t) - X_i^{obs}(t)|^2 dt \quad (5.1)$$

où le paramètre  $\alpha_t$  est le poids accordé aux observations de trajectoires. Il est fixé à  $\alpha_t = 10^{-6}$ , de manière à donner à peu près autant d'importance au terme associé aux observations de trajectoires et à celui associé aux observations de hauteur d'eau.

On cherche toujours le coefficient de Manning dans une classe des fonctions constantes par morceaux. Le résultat de l'identification du débit est présenté dans la colonne de gauche sur la figure 5.2 (a). En comparant avec les résultats présentés sur la figure 3.6 (c), on remarque une nette amélioration par rapport à l'expérience d'assimilation sans les trajectoires : le débit identifié correspond très bien à celui de référence. En ce qui concerne le coefficient de Manning, l'erreur relative en norme infinie sur sa valeur identifiée est de  $3.2 \times 10^{-5}$ . La fonction diagnostique  $j_{diag}$  a été divisée par  $10^6$  à la fin du processus d'assimilation de données par rapport à sa valeur initiale, ce qui est aussi bien que dans la première expérience où l'on avait une connaissance exacte du coefficient de Manning et où l'on identifiait uniquement le débit (voir partie 3.3.3, page 69).



(a) Observation des particules à chaque pas de temps.

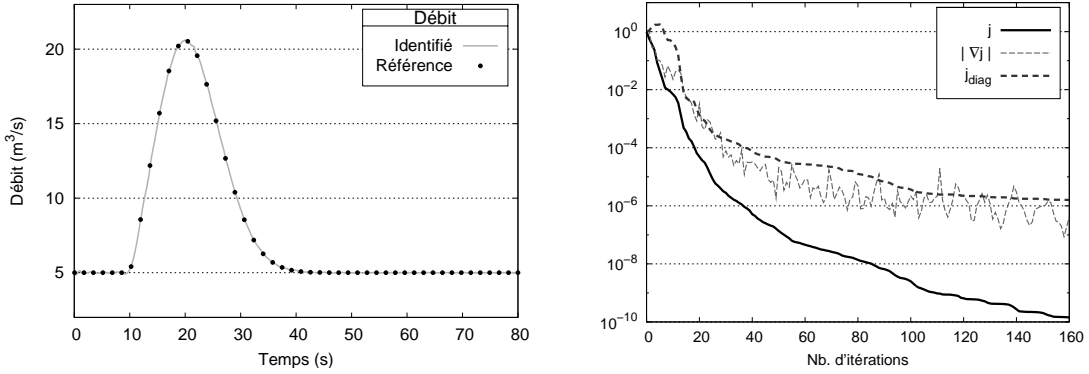
(b) Observation des particules au temps  $t^{obs} = 50$  secondes.

FIG. 5.2 – Identification conjointe du débit et du coefficient de Manning en utilisant des mesures de hauteur d'eau et des observations de trajectoires. Colonne de gauche : débit identifié en fonction du temps. Colonne de droite : évolution de la fonction coût, de la norme de son gradient et de la fonction diagnostique  $j_{diag}$ .

## Expérience 2

Pour la deuxième expérience, seule une toute petite partie des observations de trajectoires disponibles est utilisée. Plus précisément, on ne prend en compte que les positions des particules observées au temps  $t^{obs} = 50$  secondes. La fonction coût s'écrit alors :

$$j_4(\bar{q}, n) = \frac{1}{2} \int_0^T |h(x_1, y_1, t) - h^{obs}(t)|^2 dt + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{i=1}^{N_p} |X_i(t^{obs}) - X_i^{obs}(t^{obs})|^2. \quad (5.2)$$

La valeur du paramètre  $\alpha_t$  est multipliée par 1000 par rapport à l'expérience précédente afin de préserver l'équilibre entre les deux termes de la fonction coût.

On a donc  $\alpha_t = 10^{-3}$ .

Le résultat est présenté sur la figure 5.2 (b). Tout comme dans l'expérience précédente, le débit identifié correspond très bien à celui de référence. L'erreur relative en norme infinie sur la valeur identifiée du coefficient de Manning augmente à  $1.3 \times 10^{-4}$ , le processus d'optimisation nécessite une vingtaine d'itérations supplémentaires et la valeur finale de la fonction diagnostique est légèrement supérieure. Qualitativement, on peut dire que l'identification est presque aussi bonne que dans l'expérience précédente.

#### 5.1.4 Conclusion

Dans la partie 3.3, nous avons présenté les résultats de l'assimilation d'observations de hauteur uniquement. Nous avons alors montré que dans la configuration académique étudiée, ces données n'étaient pas suffisantes pour identifier correctement le débit lorsque le coefficient de Manning était dégradé. Ici, la prise en compte d'observations de trajectoires de particules permet d'identifier de manière très satisfaisante à la fois le débit et le coefficient de Manning dans la même configuration d'écoulement. Même dans le cas où les observations de trajectoires sont très ponctuelles dans le temps, l'information additionnelle qu'elles véhiculent suffit à améliorer sensiblement la qualité de l'identification par rapport à de simples observations de hauteur d'eau.

## 5.2 Cas test : identification de la topographie et des conditions initiales

Cette partie fait l'objet d'un article soumis à publication [46]. Les expériences présentées ici sont consacrées à l'identification conjointe de l'élévation du fond et des conditions initiales à partir d'observations de hauteur d'eau et de trajectoires de particules. Il s'agit d'expériences jumelles. Une expérience similaire utilisant des observations réelles de trajectoires sera présentée dans la partie 5.3.

Afin de tester l'algorithme de filtrage des trajectoires, nous considérons des observations de trajectoires synthétiques perturbées par l'ajout d'un bruit dans la vitesse de transport simulant des perturbations de petite échelle sur la surface libre. Avant de présenter les expériences d'assimilation en elles-mêmes, la méthode de perturbation des trajectoires est rapidement décrite dans le paragraphe suivant.

### 5.2.1 Perturbation des trajectoires numériques

Les trajectoires bruitées utilisées comme observations dans cette expérience sont créées à l'aide du modèle direct en enregistrant les positions successives de particules modèles transportées par un champ de vitesse turbulent noté  $\mathbf{v}^{tr}$ . Ce dernier est formé à partir de la vitesse modèle de transport  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$  et d'une perturbation notée  $\hat{\mathbf{v}}$  :

$$\mathbf{v}^{tr}(x, t) = \gamma \mathbf{u}(x, t) + \hat{\mathbf{v}}(x, t) . \quad (5.3)$$

La perturbation  $\hat{\mathbf{v}}$  est définie par un processus de Markov gaussien. On désigne par la variable aléatoire  $\hat{\mathbf{v}}^n = \hat{\mathbf{v}}(\cdot, t^n)$  la perturbation sur le champ de vitesse au temps  $t^n$ . On introduit également le tenseur de Reynolds  $R(t^n)$  et le tenseur de corrélation en temps  $\Lambda(t^n, t^m)$  définis par :

$$\begin{aligned} R(t^n) &= \mathbb{E}(\hat{\mathbf{v}}^n (\hat{\mathbf{v}}^n)^T) , \\ \Lambda(t^n, t^m) &= \mathbb{E}(\hat{\mathbf{v}}^n (\hat{\mathbf{v}}^m)^T) . \end{aligned}$$

Le tenseur de Reynolds  $R$  est une matrice symétrique définie positive. On considère le cas particulier où  $\Lambda$  est une fonction exponentiellement décroissante en temps de  $R$  :

$$\Lambda(t^n + \Delta t^n, t^n) = e^{-\frac{\Delta t^n}{T_L}} R(t^n) ,$$

où  $T_L$  est le temps caractéristique de la turbulence locale. La perturbation  $\hat{\mathbf{v}}^n$  est alors définie par l'équation suivante :

$$\hat{\mathbf{v}}^{n+1} = e^{-\frac{\Delta t^n}{T_L}} \hat{\mathbf{v}}^n + \mathbf{w}^n ,$$

où  $\mathbf{w}^n$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $W_n$  définie par :

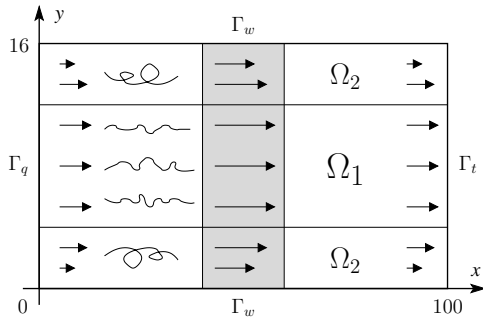
$$W_n = \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t^n}{T_L}}\right) R(t^n) .$$

Ainsi, l'espérance de la variable aléatoire  $\hat{\mathbf{v}}^n$  est toujours nulle. Sa covariance  $R$  sera définie par la suite.

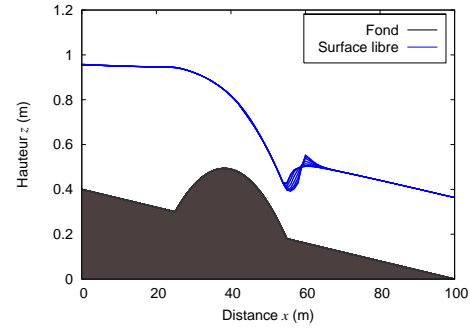
### 5.2.2 Configuration de l'expérience

La configuration pour les expériences jumelles consiste en un écoulement dans un canal rectangulaire de dimensions  $100 \times 16 m$  avec un fond incliné à 0.4% qui présente une bosse d'amplitude  $0.25 m$  sur toute la largeur, centrée en  $x = 40 m$  et de longueur  $30 m$ . La présence de cette bosse provoque une accélération de l'écoulement dans la région  $x \in [25, 60]$ .

Un débit constant  $\bar{q} = 8 \text{ m}^3/\text{s}$  est imposé au bord  $\Gamma_q$  défini par  $x = 0$ . Les bords définis par  $y = 0$  et  $y = 16 \text{ m}$  sont constitués de murs et notés  $\Gamma_w$ . Enfin, des conditions de Neumann homogènes sont imposées au bord  $\Gamma_t$  défini par  $x = 100 \text{ m}$  (voir figure 5.3 (a)). Afin de simuler un ralentissement de l'écoulement lié aux effets de bord, le coefficient de Manning  $n$  est variable en espace. Dans la partie centrale du domaine, notée  $\Omega_1$  et définie par  $|y - 8| < 4 \text{ m}$ , la valeur de  $n$  est fixée à 0.02. Dans les parties latérales du domaine, notées  $\Omega_2$ , elle augmente de manière linéaire de 0.02 jusqu'à 0.04 aux bords  $\Gamma_w$ .



(a) Vue schématique de haut et découpage en zones du domaine de calcul.



(b) Coupe verticale du domaine fluide dans la configuration de référence.

FIG. 5.3 – Identification conjointe de la topographie et des conditions initiales : configuration de l'écoulement pour les expériences jumelles d'assimilation lagrangiennes de données.

Cette configuration conduit l'écoulement jusqu'à un état permanent qui sert de condition initiale pour la construction des observations et pour les expériences jumelles. Une coupe verticale du domaine fluide dans le plan longitudinal sur la figure 5.3(b) représente la topographie du fond et la surface libre pour cet écoulement stationnaire.

Les expériences jumelles d'assimilation de données sont réalisées sur une durée de simulation  $T = 100 \text{ s}$ , avec un pas de temps constant  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ .

### 5.2.3 Création des observations

#### Création des observations de hauteur d'eau

Sur une période de calcul  $T = 100 \text{ s}$ , la hauteur d'eau est enregistrée aux points d'abscisse  $x_1 = 15 \text{ m}$  et  $x_2 = 70 \text{ m}$ , c'est-à-dire de part et d'autre de la bosse, sur toute la largeur du domaine et de manière continue en temps. Ces mesures serviront

par la suite d'observations notées  $h_i^{obs}(y; t)$  pour  $i = 1, 2$  dans les expériences jumelles.

### Construction des trajectoires bruitées

Des particules sont lâchées en amont de l'écoulement et transportée par une vitesse  $\mathbf{v}^{tr} = \gamma \mathbf{u} + \hat{\mathbf{v}}$  pour laquelle la perturbation  $\hat{\mathbf{v}}$  est la réalisation d'un processus de Markov gaussien dont les paramètres dépendent de la position dans le domaine et de l'état de l'écoulement. En reprenant les notations du paragraphe 5.2.1, la matrice de corrélation est définie par :

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix},$$

où  $\rho$  est le coefficient de corrélation entre les deux composantes de la vitesse. Nous choisissons de définir les écarts-types  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  par :

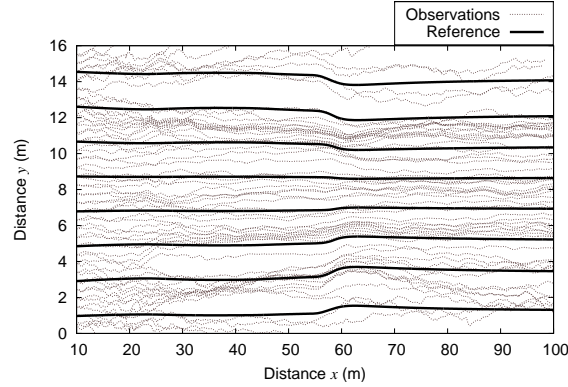
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{c_x}{1 + (v_x)^2}} \quad \text{et} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{c_y}{1 + (v_y)^2}},$$

où  $c_x$  et  $c_y$  sont deux coefficients dont la valeur est donnée ci-après,  $v_x$  et  $v_y$  sont les composantes longitudinales et transversales de la vitesse de transport des particules. Ce choix correspond à une perturbation relative qui s'atténue avec la vitesse de l'écoulement. Les valeurs numériques des paramètres utilisées pour la zone centrale de l'écoulement et les deux bandes latérales sont reportées dans le tableau 5.1. Ces valeurs correspondent à une perturbation d'amplitude plus importante dans les bandes latérales que dans le canal central, où le temps caractéristique des perturbations est deux fois plus long. Un total de  $N_p = 640$  particules est lâché dans l'écoulement par paquets de 32, toutes les 2 secondes au point d'abscisse  $x = 10$ . À chaque fois, les particules sont réparties de manière uniforme sur la largeur du domaine. Les trajectoires de ces particules transportées par le champ de vitesse perturbé  $\mathbf{v}^{tr}$  seront utilisées comme observations et notées  $X_i^{obs}$ . Elles sont représentées dans le plan  $(x, y)$  en traits pointillés fins sur la figure 5.4, tandis que les

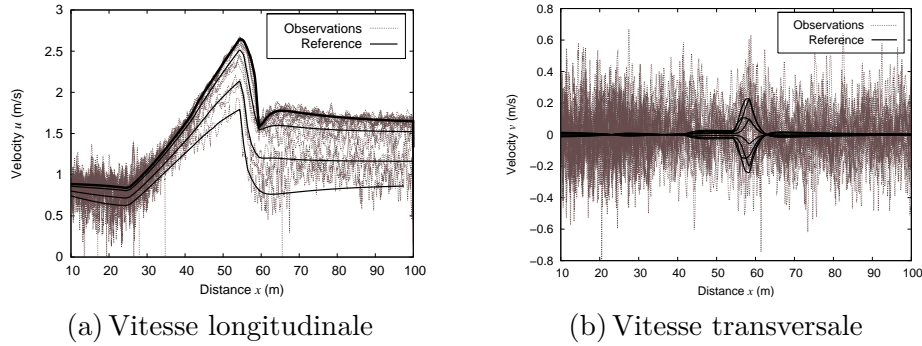
	$\rho$	$c_x$	$c_y$	$T_L$
partie centrale $\Omega_1$	0.2	0.5	0.3	0.6
bandes latérales $\Omega_2$	0.3	0.6	0.4	0.3

TAB. 5.1 – Tableau de valeurs des paramètres pour le modèle de perturbation des trajectoires synthétiques.



FIG. 5.4 – Trajectoires bruitées et trajectoires de référence dans le plan  $(x, y)$ .

trajectoires de particules qui seraient transportées par un champ de vitesse non perturbé (correspondant au cas où  $\hat{\mathbf{v}} \equiv 0$ ) sont représentées en traits gras noirs. Ces trajectoires de référence seront notées  $X_i^{ref}$  par la suite. La vitesse longitudinale (dans le sens des  $x$  croissants) et la vitesse transversale (dans le sens des  $y$  croissants) des particules bruitées et des particules de référence sont représentées selon le même principe en fonction de  $x$  et de  $y$  respectivement sur les figures 5.5 (a) et 5.5 (b).

FIG. 5.5 – Vitesses des particules bruitées et des particules de référence en fonction de la variable d'espace  $x$ .

### Filtrage des trajectoires

Des trajectoires filtrées sont reconstruites à partir des observations de trajectoires bruitées  $X_i^{obs}$  en utilisant la méthode détaillée dans la partie 4.4. Ce filtrage peut être effectué à différentes échelles, en utilisant des filtres de dimensions différentes.

En pratique, ces dimensions doivent être choisies en fonction des échelles et des variations caractéristiques en temps et en espace de l'écoulement, ou à défaut de connaissance, à partir d'hypothèses *a priori*.

Ainsi, dans le cas test en question, on prend en compte le fait que l'écoulement considéré est dans un état stationnaire pour adopter une fenêtre temporelle la plus large possible, c'est-à-dire  $\mathcal{W}_t = [0, T]$  pour tout temps  $t$ .

Concernant les dimensions de la fenêtre spatiale, elle doivent être choisies suffisamment grandes afin de supprimer le plus de perturbations de petites échelles possible, tout en ne lissant pas trop les variations caractéristiques de l'écoulement. On se limitera à une taille de filtre constante en temps et en espace. Comme on observe sur les trajectoires brutes  $X_i^{obs}$  des variations de vitesse longitudinale importantes, la dimension correspondante du filtre est fixée à une petite valeur, soit 1% de la longueur du domaine. Pour la dimension transversale, un compromis est possible entre une valeur trop petite pour filtrer suffisamment les petites échelles de perturbation et une valeur trop grande qui amènerait à lisser les effets de bord : nous choisissons une largeur correspondant à  $\frac{1}{16}$  de celle du canal, soit 1 m. Ainsi, la fenêtre spatiale est formée par le carré de côté 1 m.

Le nombre total de trajectoires reconstruites est du même ordre de grandeur que pour les observations brutes avant filtrage, soit  $N_m = 200$ . Elles sont créées par intégration en temps du système d'équations (4.9), à partir de lots de 10 particules lâchées toutes les 2 secondes au point d'abscisse  $x = 10$  m et réparties de manière uniforme sur la largeur.

### 5.2.4 Identification de la topographie seule

Dans cette première expérience, nous cherchons à identifier la topographie de référence qui a servi à la création des observations à partir de l'hypothèse *a priori* d'un fond à pente constante de 0.4%, sans bosse, en utilisant les observations disponibles que sont les mesures de hauteur d'eau et les trajectoires de particules. La topographie  $z_b$  est la seule variable de contrôle modifiée par rapport à la configuration de référence. En particulier, la condition initiale de l'écoulement est toujours celle de l'écoulement permanent ayant servi à la création des observations. Ce choix contraint le problème d'identification et facilite sensiblement l'identification de la valeur optimale de la topographie. Démarrer l'assimilation de donnée à partir d'une valeur différente de la condition initiale serait plus réaliste car celle de référence n'est *a priori* pas connue. Mais cela nécessiterait d'identifier ce paramètre conjointement à la topographie. Ce problème sera abordé dans la partie 5.2.5.

Nous allons maintenant présenter différents résultats d'identification de la topographie, en faisant varier les observations utilisées pour l'assimilation de données.

### Observations de hauteur d'eau seules

Dans un premier temps, nous utilisons uniquement comme observations les hauteurs d'eau  $h_i^{obs}$  disponibles aux points d'abscisse  $x_1 = 15\text{ m}$  et  $x_2 = 70\text{ m}$  pour identifier la topographie  $z_b$ . Pour cela, on cherche à minimiser la fonction coût suivante :

$$j_1(z_b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_0^{y_L} |h(x_i, y; t) - h_i^{obs}(y; t)|^2 dy dt + \frac{\alpha_p}{2} \|\nabla z_b\|_{\Omega}^2, \quad (5.4)$$

où  $y_L$  désigne la largeur du domaine  $\Omega$ . Un terme de régularisation construit sur la norme du gradient de topographie est introduit afin de lisser la solution. La valeur du paramètre  $\alpha_p$  est choisie de manière à ce que le poids de la régularisation n'entrave pas l'effet de l'autre terme. Dans cette expérience, elle a été fixée à  $\alpha_p = 10^{-3}$ .

Sur la figure 5.6 (a) dans la colonne de gauche, la topographie de référence est dessinée avec le trait gras noir et la topographie identifiée avec le trait fin gris. On remarque que cette dernière présente de fortes variations de niveau par rapport à la topographie de référence, notamment dans la première partie du domaine. La figure de la colonne de droite montre l'évolution de la valeur de la fonction coût, de la norme de son gradient et de la valeur de la fonction diagnostique  $j_{diag}$ , toutes normalisées par leur valeur initiale, au cours des itérations du processus d'optimisation. On peut noter que l'algorithme d'optimisation converge très lentement et que la valeur de la fonction diagnostique, dont la décroissance au cours de l'assimilation peut être utilisée comme une mesure de la qualité de l'identification, a tout juste été divisée par 2. Cela confirme que l'identification est globalement loin d'être satisfaisante.

### Observations de trajectoires non bruitées

Dans cette expérience, on ajoute aux observations de hauteur d'eau celles des  $N_p = 640$  trajectoires de référence  $X_i^{ref}$  (voir page 99). Les particules observées étant transportées par la vitesse de transport  $\gamma \mathbf{u}$  non perturbée, cette expérience sert de référence pour tester la performance de la méthode d'assimilation dans des conditions idéales, sans bruit, ainsi que pour évaluer l'efficacité du filtrage des trajectoires bruitées dans les expériences suivantes.

La fonction coût est construite à partir de celle du paragraphe précédent, avec un terme supplémentaire qui mesure l'écart entre les particules modèles et les

particules de référence :

$$j_2(z_b) = j_1(z_b) + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} |X_i(t) - X_i^{ref}(t)|^2 dt . \quad (5.5)$$

Le paramètre  $\alpha_t$  détermine le poids accordé aux observations de trajectoires. Sa valeur est fixée à  $\alpha_t = 10^{-5}$ , de manière à donner à peu près autant d'importance au terme associé aux observations de trajectoires qu'à celui associé aux observations de hauteur d'eau. Le paramètre  $\alpha_p$  reste fixé à  $10^{-3}$ . Comme on peut le voir sur la figure 5.6 (b), la topographie identifiée est très proche de celle de référence, ce que confirme la valeur de la fonction  $j_{diag}$  qui est divisée par 80 à la fin de l'optimisation. La fonction coût  $j_2$  atteint un minimum à 0.15075, valeur constituée pour 93% par le terme de régularisation. La qualité de l'identification est donc très bonne.

### Observations de trajectoires bruitées

Cette fois, à la place des observations de trajectoires de référence, on utilise les 640 trajectoires bruitées  $X_i^{obs}$ , avant filtrage. La fonction coût est construite à partir de  $j_1$ , avec un terme supplémentaire qui prend en compte l'écart entre les trajectoires des particules modèles et les trajectoires bruitées :

$$j_3(z_b) = j_1(z_b) + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} |X_i(t) - X_i^{obs}(t)|^2 dt . \quad (5.6)$$

En utilisant les mêmes valeurs pour les paramètres  $\alpha_p$  et  $\alpha_t$  que dans le paragraphe précédent, la topographie identifiée présente des variations de grande amplitude, bien que la forme de la bosse soit relativement bien retrouvée, comme on peut le voir sur la figure 5.6 (c). La valeur de la fonction diagnostique  $j_{diag}$  est divisée par 6 par rapport à sa valeur initiale, ce qui est beaucoup moins bien que dans le paragraphe précédent avec les trajectoires non bruitées.

### Observations de trajectoires filtrées

Dans cette expérience, on utilise maintenant comme observations les trajectoires filtrées notées  $\bar{X}_j$ . La fonction coût est construite à partir de  $j_1$ , avec un terme supplémentaire qui prend en compte l'écart entre les trajectoires des particules modèles et les trajectoires filtrées :

$$j_4(z_b) = j_1(z_b) + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{j=1}^{N_m} \int_{t_j^0}^{t_j^f} |X_j(t) - \bar{X}_j(t)|^2 dt . \quad (5.7)$$

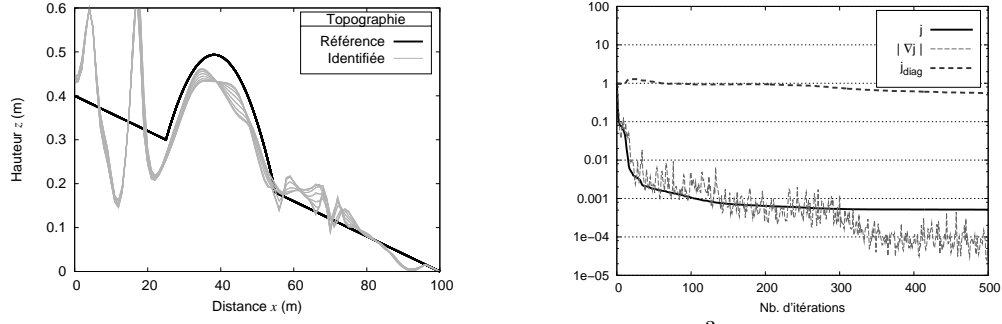
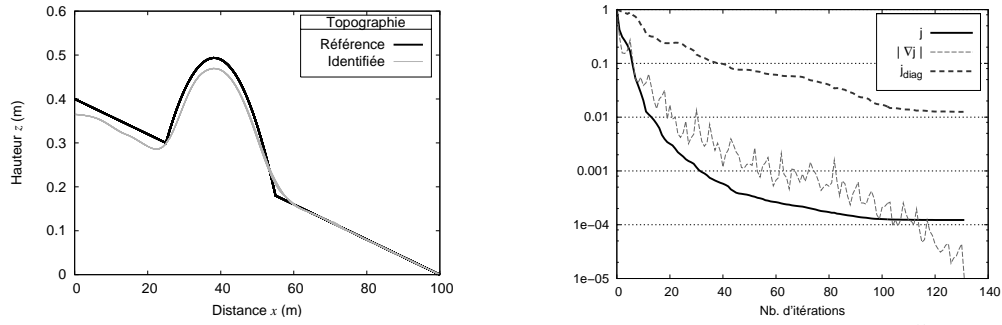
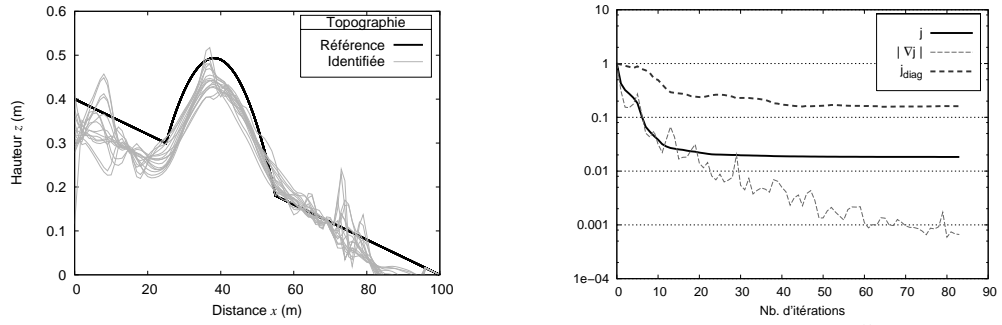
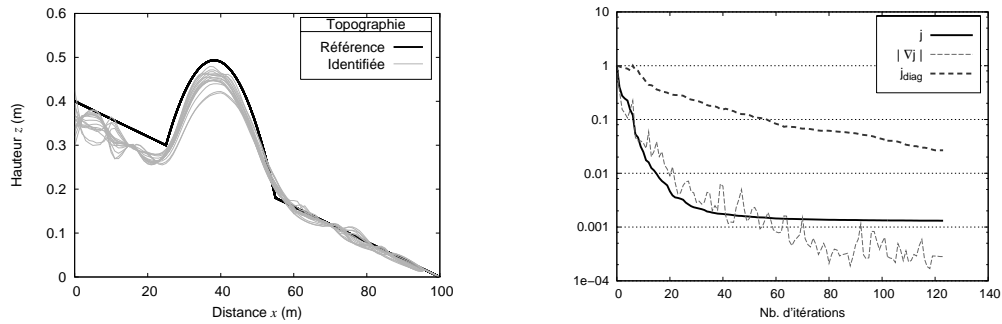
(a) Mesures de hauteur d'eau seulement.  $\alpha_p = 10^{-3}$ .(b) Mesures de hauteur d'eau et trajectoires de référence.  $\alpha_t = 10^{-5}$ ,  $\alpha_p = 10^{-3}$ .(c) Mesures de hauteur d'eau et trajectoires bruitées.  $\alpha_t = 10^{-5}$ ,  $\alpha_p = 10^{-3}$ .(d) Mesures de hauteur d'eau et trajectoires filtrées.  $\alpha_t = 2 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha_p = 10^{-3}$ .

FIG. 5.6 – Identification de la topographie en utilisant des mesures de hauteur d'eau et des observations de trajectoires. Colonne de gauche : topographie identifiée. Colonne de droite : évolution de la fonction coût, de la norme de son gradient et de la fonction diagnostique  $j_{diag}$ .

On considère les  $N_m = 200$  trajectoires filtrées dont la construction a été décrite dans la partie 5.2.3. Puisque le nombre de trajectoires est moins important que dans les expériences précédentes, on augmente la valeur du paramètre  $\alpha_t$  afin de rééquilibrer les poids respectifs des différents termes de la fonction coût. Ainsi, on a maintenant  $\alpha_t = 2 \times 10^{-5}$  tandis que l'on maintient  $\alpha_p = 10^{-3}$ . Sur la figure 5.6 (d), on observe une amélioration notable de la qualité de l'identification par rapport à l'expérience utilisant les observations de trajectoires non filtrées. La topographie identifiée est plus proche de celle de référence. Cette impression est confirmée par la valeur de la fonction  $j_{diag}$  à la fin du processus d'optimisation qui est divisée par 37 par rapport à sa valeur initiale.

### 5.2.5 Identification de la topographie et des conditions initiales

Nous allons maintenant nous rapprocher de conditions expérimentales plus réelles en cherchant à identifier à la fois la topographie et les conditions initiales (hauteur d'eau  $h^0$  et vitesse  $\mathbf{u}^0$ ), en partant de l'hypothèse que les deux paramètres sont inconnus. Comme dans la partie 5.2.4, on part d'une valeur initiale de la topographie correspondant à un fond à pente constante de 0.4% sans bosse. Mais cette fois, au lieu d'utiliser la condition initiale correspondant à l'écoulement de référence, représentée en trait noir sur la figure 5.7, on part de l'état stationnaire obtenu à partir de la topographie modifiée, représenté en trait grisé.

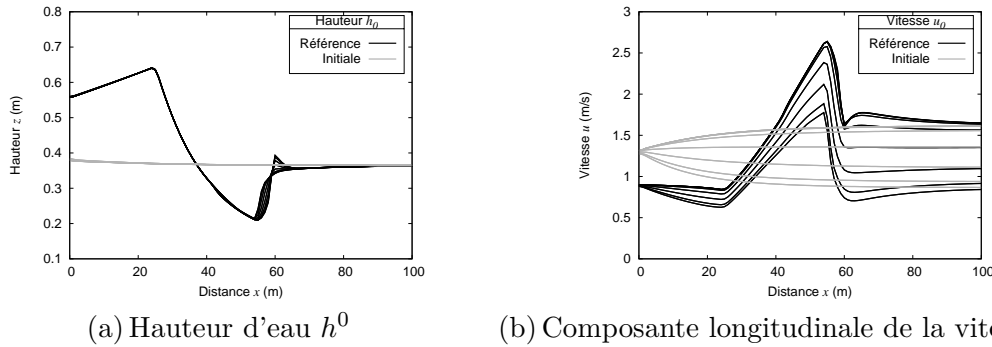


FIG. 5.7 – Conditions initiales servant d'hypothèse *a priori* pour les expériences jumelles d'assimilation.

### Observations de hauteur d'eau seules

Comme dans le cas de l'identification de la topographie seule, utilisons dans un premier temps seulement les observations de hauteur d'eau  $h_i^{obs}$  aux points d'abscisses

$x_1 = 15 \text{ m}$  et  $x_2 = 70 \text{ m}$ .

Une fonction coût similaire à celle notée  $j_1$  dans la partie 5.2.4 est utilisée ici, à deux variantes près. Tout d'abord, les conditions initiales  $h^0$  et  $\mathbf{u}^0$  sont également des variables de contrôle. Ensuite, un terme de régularisation faisant intervenir la norme du laplacien de la condition initiale est introduit. Elle s'écrit donc de la manière suivante :

$$j_5(z_b, h^0, \mathbf{u}^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_0^{y_L} |h(x_i, y; t) - h_i^{obs}(y; t)|^2 dy dt \quad (5.8)$$

$$+ \frac{\alpha_p}{2} \|\nabla z_b\|_{\Omega}^2 + \frac{\alpha_i}{2} (\|\Delta h^0\|_{\Omega}^2 + \|\Delta \mathbf{u}^0\|_{\Omega}^2) .$$

La valeur  $\alpha_p = 10^{-3}$  est utilisée pour le poids accordé au terme de régularisation sur la topographie, tandis que l'on fixe  $\alpha_i = 10^{-2}$ . La figure 5.8 montre la topographie identifiée ainsi que l'évolution de la valeur de la fonction coût au cours des itérations du processus de d'optimisation. On voit clairement que la topographie identifiée est très éloignée de celle de référence. Bien que la valeur de la fonction coût  $j_5$  ait été divisée par près de 45 000, pour valoir  $2.5 \times 10^{-2}$  à la fin du processus de d'optimisation (valeur composée à 98% par les termes de régularisation), la fonction diagnostique  $j_{diag}$  est à peine diminuée de 30%. L'utilisation d'observations ponctuelles en espace de hauteur d'eau est donc largement insuffisante pour l'identification conjointe de la topographie et des conditions initiales dans ces conditions d'expérience.

### Observations de trajectoires non-bruitées

Ajoutons aux observations de hauteur d'eau celles des trajectoires de référence  $X_i^{ref}$ . Tout comme dans la partie 5.2.4, la fonction coût est construite à partir de la

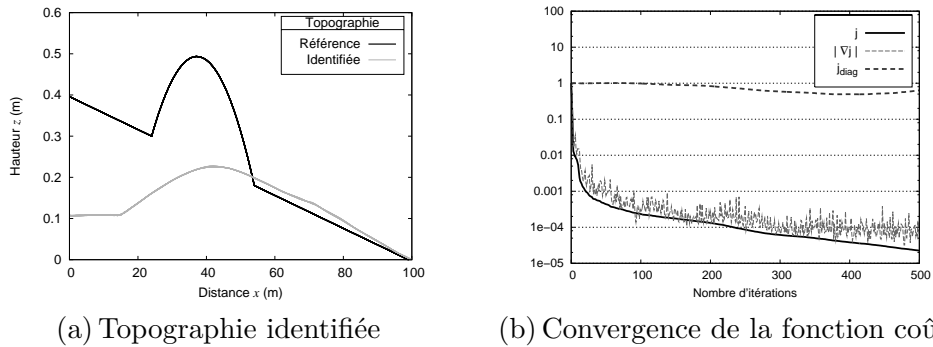


FIG. 5.8 – Identification de la topographie du fond et des conditions initiales à partir des observations de hauteur d'eau seules.  $\alpha_p = 10^{-3}$ ,  $\alpha_i = 10^{-2}$ .

précédente avec un terme supplémentaire mesurant la distance entre les particules modèles et les particules de référence :

$$j_6(z_b, h^0, \mathbf{u}^0) = j_5(z_b, h^0, \mathbf{u}^0) + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t_i^0}^{t_i^f} |X_i(t) - X_i^{\text{ref}}(t)|^2 dt . \quad (5.9)$$

On souhaite, comme dans la partie 5.2.4, accorder autant d'importance au terme associé aux observations de trajectoire et à celui associé aux observations de hauteur d'eau. Le paramètre  $\alpha_t$  est alors fixé à  $5 \times 10^{-5}$ . On laisse  $\alpha_p = 10^{-3}$  et  $\alpha_i = 10^{-2}$ . Comme le montre la figure 5.9 (a), la topographie identifiée reproduit finement la bosse de la topographie de référence et elle est semblable à celle, représentée sur la figure 5.6 (b), issue de l'expérience d'identification de la topographie seule avec les trajectoires de référence.

Concernant les variables  $h^0$  et  $\mathbf{u}^0$ , dont la valeur est représentée sur les figures 5.9 (c) et (d), la qualité de l'identification est très bonne dans la première moitié de l'écoulement (pour des valeurs de la variable d'espace  $x$  comprises entre 0 et 40) puis se dégrade sensiblement dans la seconde moitié. On attribue ce phénomène à la plus faible sensibilité des observations aux variations de la condition initiale dans cette partie du domaine proche de l'aval. Cela signifie que l'écart constaté entre la

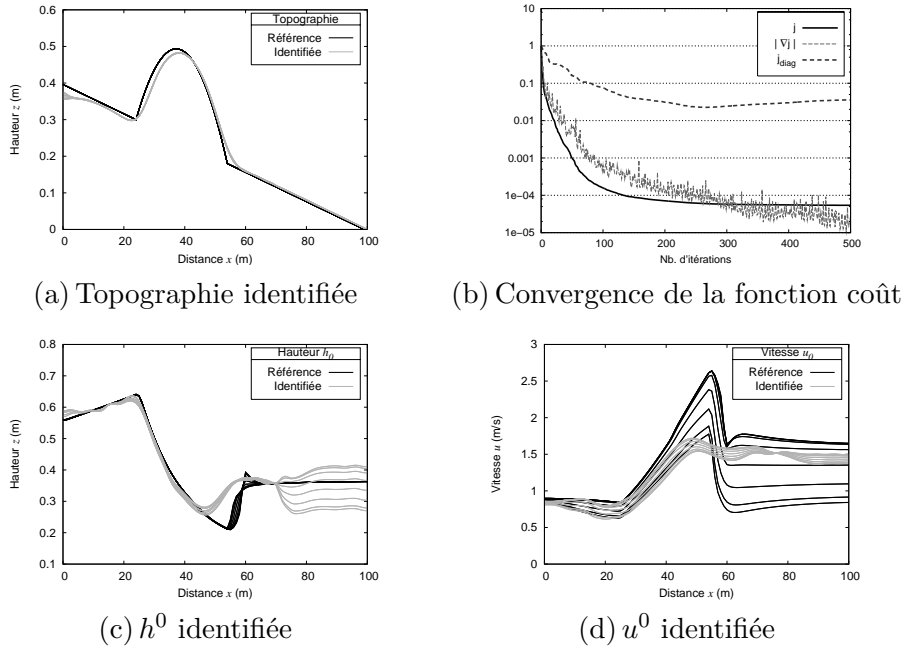


FIG. 5.9 – Identification de la topographie du fond et des conditions initiales à partir des observations de hauteur d'eau et de trajectoires non bruitées.  $\alpha_t = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha_p = 10^{-3}$ ,  $\alpha_i = 10^{-2}$ .



valeur identifiée de la condition initiale et celle de référence ne correspond pas à une différence notable dans les observations. Par ailleurs, les conséquences de cet écart sur l'écoulement dans sa globalité sont faibles.

La valeur de la fonction diagnostique  $j_{diag}$  diminue régulièrement dans un premier temps au cours des itérations du processus de minimisation, puis augmente légèrement jusqu'à se stabiliser à une valeur 28 fois plus petite qu'initialement.

### Observations de trajectoires filtrées

Utilisons à présent les observations de trajectoires filtrées  $\bar{X}_j$  en plus des observations de hauteur d'eau pour identifier conjointement la topographie et les conditions initiales. La fonction coût est construite à partir  $j_5$  avec un terme supplémentaire mesurant l'écart entre les trajectoires des particules modèles et les trajectoires filtrées :

$$j_7(z_b, h^0, \mathbf{u}^0) = j_5(z_b, h^0, \mathbf{u}^0) + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{j=1}^{N_m} \int_{t_i^0}^{t_i^f} |X_j(t) - \bar{X}_j(t)|^2 dt . \quad (5.10)$$

La valeur du paramètre  $\alpha_t$  est doublée par rapport à l'expérience précédente utilisant les trajectoires de référence, de la même manière que dans la partie 5.2.4. On a donc  $\alpha_t = 10^{-4}$ . Concernant les paramètres  $\alpha_p$  et  $\alpha_i$ , si la même valeur que dans les expériences précédentes est utilisée, la topographie ainsi que les conditions initiales identifiées sont sensiblement dégradées par rapport à la solution de référence. Elles présentent des oscillations importantes notamment dans la partie amont du domaine. En utilisant  $\alpha_p = 10^{-2}$  et en laissant  $\alpha_i$  inchangée, les résultats sont bien meilleurs, comme le montre la figure 5.10. La topographie identifiée reproduit correctement la bosse de la topographie de référence. Sur les figures 5.10 (c) et (d), on observe que les conditions initiales identifiées sont qualitativement semblables à celles obtenues dans l'expérience précédente utilisant les trajectoires de référence : bonne qualité dans la première moitié de l'écoulement et dégradation dans la seconde moitié due à une plus faible sensibilité des observations aux conditions initiales dans cette partie du domaine. Néanmoins, de légères variations irrégulières apparaissent dans la zone la plus en amont du domaine. D'autre part, la profondeur est légèrement sur-évaluée et la vitesse sous-évaluée dans la zone située immédiatement au-dessus la bosse.

La valeur de la fonction diagnostique  $j_{diag}$  est divisée par 19 par rapport à sa valeur initiale à la fin du processus d'optimisation.

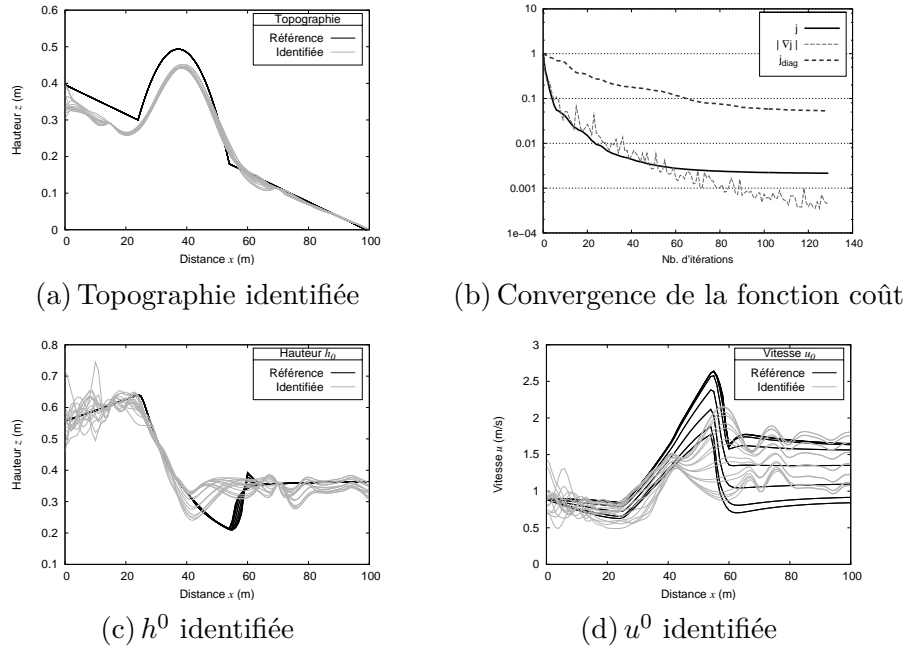


FIG. 5.10 – Identification de la topographie du fond et des conditions initiales à partir des observations de hauteur d'eau et de trajectoires filtrées.  $\alpha_t = 10^{-4}$ ,  $\alpha_p = 10^{-2}$ ,  $\alpha_i = 10^{-2}$ .

### 5.2.6 Conclusion

Nous venons de présenter des expériences jumelles d'assimilation de trajectoires concernant l'identification de la topographie et des conditions initiales dans une configuration simple de canal en régime permanent.

Le contexte est différent des expériences présentées dans la partie 5.1. En effet, les variables de contrôle ne sont pas les mêmes et la dynamique de l'écoulement présente moins de variations en temps puisque l'on considère un écoulement stationnaire. Par ailleurs, les observations de trajectoires sont plus denses en temps et en espace, ce qui nous a permis de mettre en œuvre une méthode de filtrage.

Nous avons mis en évidence l'intérêt des observations de trajectoires comme complément d'information pour l'identification conjointe de la topographie et des conditions initiales par rapport à de simples observations de hauteur d'eau. Ce résultat a été obtenu dans le cadre d'expériences jumelles, dans lesquelles une grande partie des incertitudes sur les données du problème est maîtrisée. Afin de confronter la méthode à un contexte moins idéal, une expérience similaire utilisant des observations réelles de trajectoires est présentée dans la partie suivante.

## 5.3 Assimilation de données réelles

Cette partie présente une expérience d'assimilation de données réelles de trajectoires dans un canal. Les particules observées sont des confettis disséminés à la surface de l'eau, entraînés par l'écoulement dans un canal et filmés par une caméra vidéo. Les trajectoires de ces confettis sont ensuite extraites des images vidéo et exploitées dans le cadre d'une expérience d'assimilation de données. Ce travail a été effectué en collaboration avec Nicolas Rivière (LMFA<sup>1</sup>) pour la réalisation de l'écoulement en canal et la prise de vue vidéo et avec Étienne Huot (INRIA<sup>2</sup>) pour l'exploitation des images vidéo. Il fait l'objet d'un article en cours de rédaction [42].

### 5.3.1 Configuration de l'expérience

L'expérience utilise un canal à section rectangulaire de  $8\text{ m}$  de long et de largeur  $L = 0.805\text{ m}$ . La zone d'observation s'étend dans la direction longitudinale sur  $1.1\text{ m}$ . Un obstacle est placé sur toute la largeur du domaine entre les points d'abscisses  $x_1 = 0.43\text{ m}$  et  $x_2 = 0.524\text{ m}$ . Il s'agit d'une planche de bois de  $94\text{ mm}$  de largeur et de  $37\text{ mm}$  de hauteur. Le canal est incliné dans le sens de l'écoulement avec une pente estimée à  $\frac{1.8}{1000}$ .

À l'entrée du canal est imposé un débit constant de  $\bar{q} = 20$  litres par seconde et à la sortie, le niveau de la surface libre est fixé à  $\bar{z}_s = 0.107\text{ m}$ . Ces conditions aux limites, maintenues constantes au cours du temps, conduisent l'écoulement à un état permanent en moyenne. C'est dans cette configuration hydraulique que sont effectuées les observations. Une description schématique du domaine d'étude est dessinée sur la figure 5.11, par une vue de dessus ainsi qu'une vue de profil. Le sens de l'écoulement y est indiqué par les grandes flèches.

### 5.3.2 Observations

Une fois l'état permanent de l'écoulement atteint, la hauteur d'eau  $h$  est mesurée sur différents points, entre les abscisses  $x = 0.18\text{ m}$  et  $x = 0.85\text{ m}$  dans le repère de la zone d'étude représentée sur la figure 5.11. Les points d'observation sont représentés par de petits carrés noirs.

<sup>1</sup>Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, Unité Mixte de Recherche CNRS, École centrale de Lyon, Université Claude Bernard (Lyon 1) et Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

<sup>2</sup>Projet CLIME, INRIA Rocquencourt

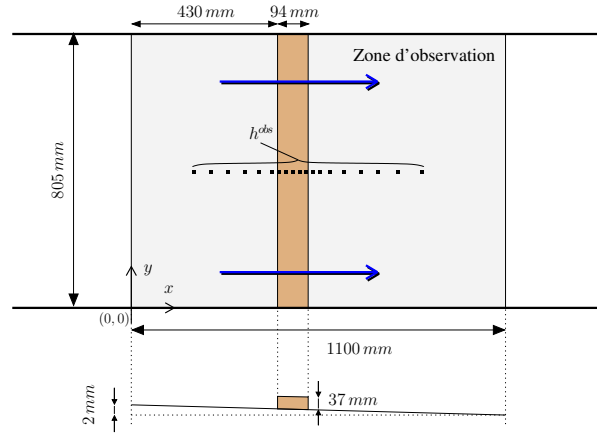


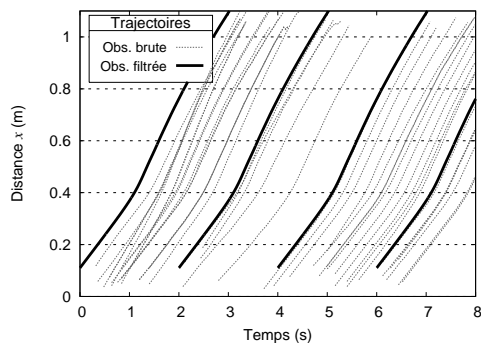
FIG. 5.11 – Assimilation de données de trajectoires réelles : description schématique du montage expérimental.

Par ailleurs, des confettis sont disséminés sur la surface libre quelques mètres en amont de l'obstacle, en dehors de la zone d'observation. Leur passage à l'intérieur de celle-ci est filmé à l'aide d'une caméra vidéo placée à la verticale du canal, au dessus de l'obstacle. Les positions d'une série de confettis ont été relevées sur chaque image d'une séquence vidéo sur une durée totale de 35 secondes. Un exemple d'image extraite d'une séquence est donné sur la figure 5.12. La position initiale d'un confetti est repérée manuellement sur une image, puis sa localisation d'une image sur l'autre repose sur une méthode classique de corrélation, utilisée notamment par la méthode PIV (pour *Particle Image Velocimetry* [1]). Ce travail d'extraction a été effectué par Étienne Huot (INRIA). Les positions ainsi relevées tout au long de la séquence vidéo dans l'espace de l'image sont projetées dans l'espace physique en leur appliquant une simple transformation géométrique. La distorsion liée au système optique de la caméra n'est pas prise en compte dans cette transformation et négligée par la suite. Enfin, les positions dans l'espace physique des confettis observés sont assemblées afin de reconstituer un ensemble de  $N_p = 256$  trajectoires.

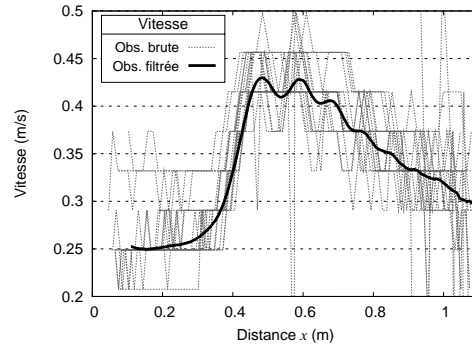
Ces trajectoires, dites "brutes", sont ensuite filtrées à l'aide de la méthode présentée dans la partie 4.4. Les dimensions de la fenêtre spatio-temporelle  $\mathcal{W}$  sont choisies en fonction des caractéristiques visibles de l'écoulement. Comme celui-ci est permanent en moyenne, la dimension temporelle de la fenêtre de filtrage est choisie large par rapport à la durée d'observation : elle s'étend sur 20 secondes. D'autre part, l'écoulement est rapidement varié dans la direction longitudinale et ne présente pas de variation transversale hormis à proximité des parois en raison de la présence d'une couche limite. Les dimensions spatiales de la fenêtre sont



FIG. 5.12 – Image extraite d’une séquence vidéo utilisée pour l’expérience. On y voit les confettis à la surface de l’eau (point blancs) ainsi que la planche au fond du canal servant d’obstacle.



(a) Repère  $t-x$



(b) Repère  $x-u$

FIG. 5.13 – Trajectoires et vitesse longitudinale des particules observées. Trait fin : observations brutes issues de l’extraction des données vidéo. Trait gras : trajectoires filtrées.

donc fixées en conséquence : sa dimension transversale correspond à la moitié de la largeur du canal, soit  $400\text{ mm}$ , et sa dimension longitudinale est beaucoup plus courte, fixée à  $22\text{ mm}$ . Au total,  $N_m = 150$  trajectoires filtrées sont reconstruites par le processus de filtrage. Sur la figure 5.13 (a) est tracée la première coordonnée  $x$  d'une série de trajectoires en fonction du temps. Les trajectoires brutes sont représentées par un trait fin en pointillés tandis que quatre trajectoires filtrées sont représentées par un trait gras continu. La figure 5.13 (b) montre quant à elle la vitesse longitudinale des particules en fonction de la première variable d'espace. On peut remarquer une quantification de la vitesse des particules observées avant filtrage. Cela est dû à l'échantillonnage de l'image vidéo : d'une image à la suivante, on ne peut observer une particule se déplacer que d'un nombre entier de pixels. Sa vitesse observée est donc nécessairement une quantité discrète. Cependant, cette quantification est fortement lissée par le processus de filtrage.

### 5.3.3 Simulation Saint-Venant de référence

Une simulation, dite “de référence”, a été réalisée avec le logiciel Dassflow, en prenant en compte toutes les informations disponibles sur la configuration et sur l'écoulement, afin de pouvoir comparer les résultats numériques avec les observations recueillies. Il s'agit d'une simple simulation directe, effectuée sans aucune assimilation de données sur un maillage structuré rectangulaire composé de  $61 \times 16$  cellules. Il y sera fait mention, dans la suite et notamment dans les figures, sous l'appellation *référence*.

La figure 5.14 montre une comparaison entre le résultat de la simulation Saint-Venant de référence et les observations. Sur la figure 5.14 (a), la hauteur d'eau  $h$  simulée est tracée en fonction de la variable d'espace  $x$  avec une ligne en pointillés et les observations  $h^{obs}$  sont reproduites par des points noirs. On remarque une bonne correspondance entre les deux, ce qui montre que le modèle Saint-Venant arrive à représenter correctement les observations de hauteur d'eau. Sur la figure 5.14 (b), on compare différentes vitesses longitudinales. La vitesse modèle  $u$  tirée de la simulation de référence est tracée en traits pointillés. Les points noirs représentent la vitesse *débitante* issue des observations de hauteur d'eau : il ne s'agit pas de la vitesse réelle de l'écoulement qui serait issue d'une mesure de vitesse, mais une vitesse notée  $u^{obs}$  calculée à partir de la valeur du débit imposé  $\bar{q}$  et des observations de hauteur d'eau  $h^{obs}$  par la formule :

$$u^{obs} = \frac{\bar{q}}{L \times h^{obs}}, \quad (5.11)$$

où  $L$  est la largeur du canal. La bonne correspondance entre ces deux courbes est à mettre en parallèle avec celle observée sur la figure précédente concernant les hauteurs.

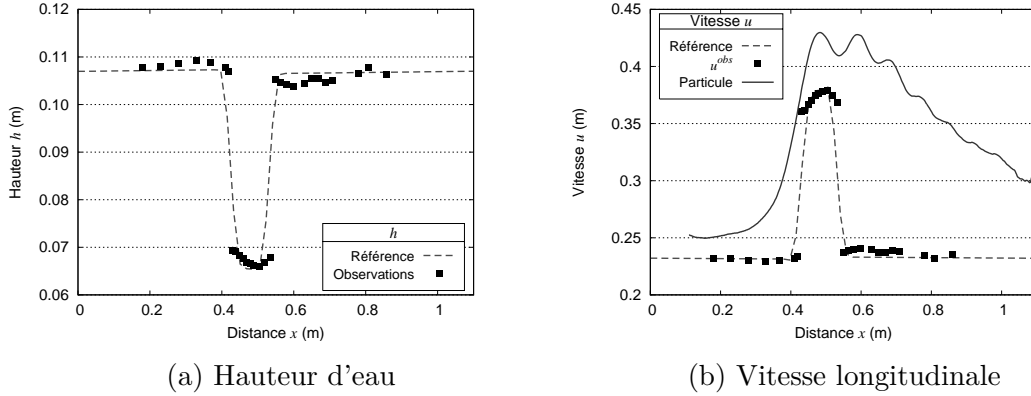


FIG. 5.14 – Comparaison entre l'écoulement de référence simulé et les observations. Trait en pointillés : simulation Saint-Venant de référence. Points noirs : observations issues de l'écoulement réel à partir des mesures de hauteur d'eau. Trait continu : vitesse d'une particule observée.

Par ailleurs, la ligne continue noire sur la figure 5.14 (b) correspond à la vitesse obtenue en dérivant une trajectoire filtrée par rapport au temps. C'est en quelque sorte la vitesse longitudinale à laquelle voyagerait une particule à la surface de l'écoulement le long d'une trajectoire filtrée. On note un décalage important entre cette vitesse de surface et la vitesse débitante.

Pour la première partie de l'écoulement ( $x < 0.5$  m), ce décalage peut être expliqué en grande partie par la relation entre la vitesse modèle  $\mathbf{u}$  et la vitesse de transport  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$  introduite dans la partie 4.2.2 et justifiée dans le cas d'un canal à fond plat. Le décalage correspond alors à une valeur du coefficient  $\gamma$  égale à 1.1 environ.

Dans la seconde partie de l'écoulement, cette relation n'est cependant plus valable car la présence de l'obstacle correspond à un fort gradient de topographie. Il s'avère qu'une telle variation n'est pas compatible avec les hypothèses des équations de Saint-Venant. En effet, d'un point de vue hydraulique, ce genre d'obstacle produit l'effet d'une “marche” de part et d'autre de laquelle des recirculations verticales de l'écoulement peuvent se former [76], comme le montre de manière schématique la figure 5.15. À l'intérieur d'une zone de recirculation, le débit est globalement nul. Dans ce cas, le décalage observé sur la figure 5.14 (b) entre la vitesse de transport et la vitesse débitante peut être expliqué par la présence de telles recirculations, ce qu'il convient d'étudier de plus près.

Au-dessus d'une planche de section rectangulaire, différents régimes d'écoulement sont possibles, en fonction de la hauteur d'eau en amont et de la submersion de l'obstacle [98]. Si celui-ci est faiblement immergé, il peut se produire un *jet plongeant* : en aval de l'obstacle, les valeurs positives de la vitesse longitudinale

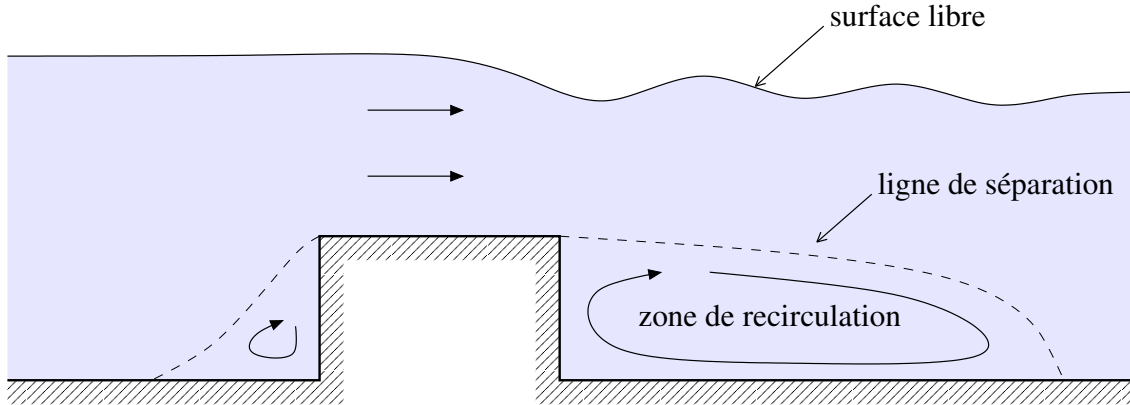


FIG. 5.15 – Vue schématique de zones de recirculation en amont et aval d'un obstacle de section rectangulaire avec surface libre.

sont situées au fond du canal tandis qu'une recirculation se forme à la surface. Pour des submersions plus importantes, l'écoulement forme un *jet de surface* : la recirculation se produit au fond, les valeurs positives de la vitesse longitudinale étant localisées entre la recirculation et la surface libre. La figure 5.15 montre un exemple de configuration en jet de surface, avec des ondes de surface.

La présence de ces recirculations n'est donc pas compatible avec les hypothèses des équations utilisées par notre modèle, qui est par conséquent *a priori* inadapté à la réalité de l'écoulement. Il faudrait pour cela un code de calcul basé sur les équations de Navier-Stokes 3D avec surface libre. Nous pouvons néanmoins essayer d'effectuer une expérience d'assimilation de données de trajectoires avec notre code Saint-Venant afin d'identifier les paramètres permettant de représenter au mieux ces structures hydrauliques tridimensionnelles. C'est ce que nous proposons dans la partie suivante.

### 5.3.4 Assimilation de données

Nous souhaitons donc identifier les paramètres de notre modèle Saint-Venant qui représentent de la meilleure manière possible l'écoulement observé dans le canal. Plus précisément, nous allons chercher à identifier la valeur de la topographie  $z_b$ , du coefficient de Manning  $n$ , des conditions initiales de l'écoulement  $h^0$  et  $\mathbf{q}^0$ , ainsi que la valeur du coefficient  $\gamma$  du modèle de transport.



### Expérience 1

Nous posons des hypothèses *a priori* sur la valeur de tous ces paramètres à identifier : le fond du canal est plat, sans obstacle ; le coefficient de Manning est fixé à  $n = 0.01$  sur tout le domaine ; les conditions initiales utilisées pour la simulation correspondent à l'écoulement permanent obtenu avec ces définitions de la topographie et du coefficient de Manning. Par ailleurs, on suppose que les particules observées sont transportées par la vitesse de transport  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$  est la vitesse du modèle d'écoulement.

Les observations utilisées sont d'une part la mesure de hauteur d'eau au seul point d'abscisse  $x_{obs} = 0.18 m$ , supposée constante dans le temps (l'état observé étant stationnaire), d'autre part les  $N_m = 150$  trajectoires filtrées notées  $X_j^{obs}(t)$ . À partir de ces observations, on construit la fonction coût suivante :

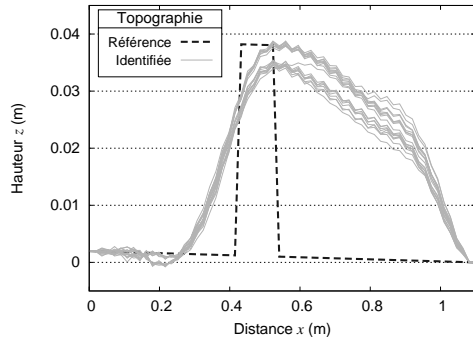
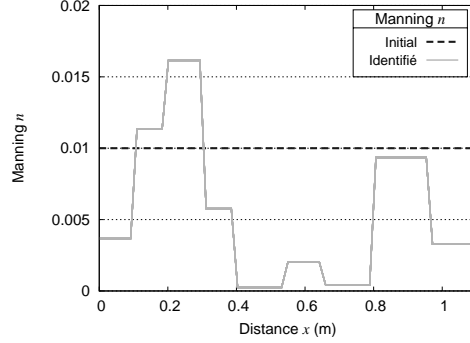
$$\begin{aligned} j(z_b, n, h^0, \mathbf{q}^0, \gamma) = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |h(x_{obs}, y; t) - h^{obs}(t)|^2 dy dt \\ & + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{j=1}^{N_m} \int_{t_j^0}^{t_j^f} |X_j(t) - X_j^{obs}(t)|^2 dt \\ & + \frac{\alpha_z}{2} \|\Delta z_b\|^2 + \frac{\alpha_h}{2} \|\Delta h^0\|^2 + \frac{\alpha_q}{2} \|\Delta \mathbf{q}^0\|^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pour un jeu de paramètres du modèle donné, le premier terme mesure sur toute la largeur  $L$  du canal l'écart entre la hauteur d'eau simulée et la hauteur d'eau observée au point  $x_{obs}$ . Le second terme mesure la distance entre des particules modèles transportées par la vitesse  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$  et les observations de trajectoires filtrées. Les trois derniers sont des termes de régularisation pour la topographie et les conditions initiales, pondérés par des coefficients  $\alpha_z$ ,  $\alpha_h$  et  $\alpha_q$  de faible valeur.

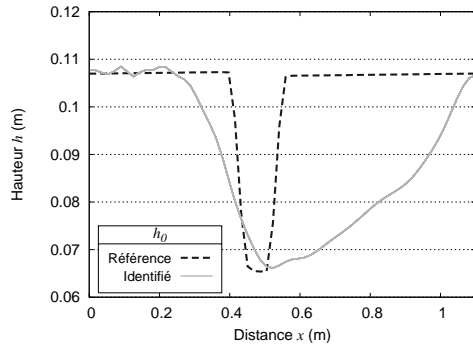
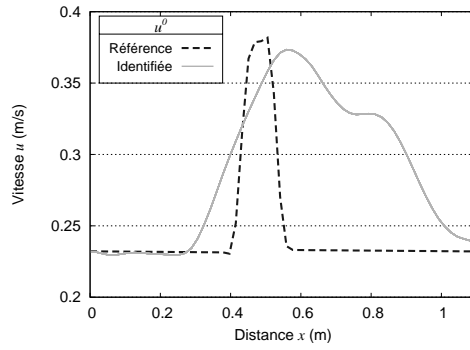
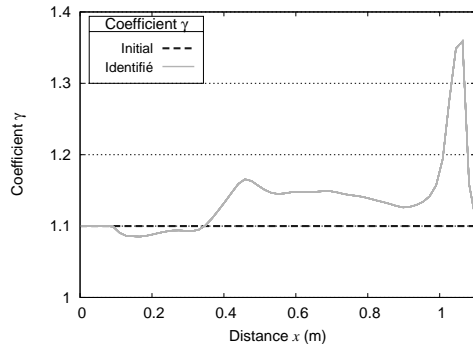
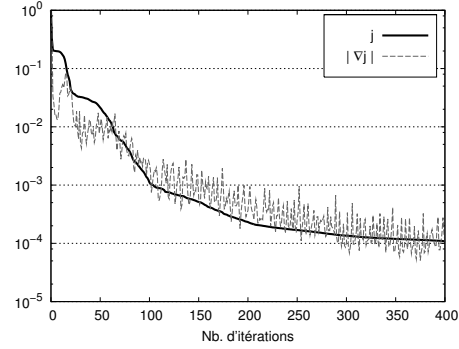
L'assimilation de données consiste à trouver le vecteur de paramètres  $(z_b, n, h^0, \mathbf{q}^0, \gamma)$  qui minimise la fonction coût  $j$ . On cherche à identifier simultanément la topographie du fond  $z_b$  en tout point du domaine. La condition initiale  $h^0$  sur la hauteur d'eau et celle  $\mathbf{q}^0$  sur le débit local sont identifiées comme des fonctions de la variable d'espace  $x$  (et donc constantes sur la largeur du domaine). Le coefficient de Manning  $n$  est cherché constant sur les zones  $\Omega_i$  définies par :

$$\begin{array}{lll} \Omega_1 : & 0 \leq x < 0.10 \text{ m} & \Omega_2 : 0.10 \leq x < 0.20 \text{ m} & \Omega_3 : 0.20 \leq x < 0.30 \text{ m} \\ \Omega_4 : & 0.30 \leq x < 0.40 \text{ m} & \Omega_5 : 0.40 \leq x < 0.55 \text{ m} & \Omega_6 : 0.55 \leq x < 0.65 \text{ m} \\ \Omega_7 : & 0.65 \leq x < 0.80 \text{ m} & \Omega_8 : 0.80 \leq x < 0.95 \text{ m} & \Omega_9 : 0.95 \leq x \leq 1.10 \text{ m} . \end{array}$$

Enfin, on cherche le coefficient multiplicateur  $\gamma$  comme une fonction de la variable d'espace  $x$ . La valeur du coefficient de pondération  $\alpha_t$  est fixée à  $10^{-5}$  afin de donner autant de poids aux observations de trajectoires qu'aux observations de hauteur d'eau. Les coefficients  $\alpha_z$ ,  $\alpha_h$  et  $\alpha_q$  des termes de régularisation sont fixés à  $10^{-9}$ ,  $10^{-12}$  et  $10^{-12}$  respectivement.

(a) Topographie  $z_b$ .

(b) Coefficient de Manning.

(c) Hauteur d'eau initiale  $h^0$ .(d) Vitesse longitudinale initiale  $u^0$ .(e) Coefficient  $\gamma$ .

(f) Fonction coût

FIG. 5.16 – Identification de la topographie  $z_b$ , du coefficient de Manning, des conditions initiales et du coefficient  $\gamma$  à partir d'observations de hauteur d'eau et de trajectoires de particules transportées par l'écoulement. Trait en pointillés : solution Saint-Venant avec paramètres de référence. Trait plein grisé : valeur des paramètres identifiés.

### Interprétation des résultats

Le résultat de l'assimilation de données est présenté sur la figure 5.16. Pour chaque variable de contrôle, la valeur identifiée est tracée avec trait continu gris. Sur les figures (a), (b) et (c), le trait en pointillés représente la valeur de la variable correspondant à la “solution de référence” des équations de Saint-Venant. Sur les figures (d) et (e), le trait en pointillés correspond à la valeur de la variable donnée *a priori*. L'évolution de la fonction coût et de la norme de son gradient est tracée en fonction du nombre d'itérations du processus de minimisation sur la figure (f).

On observe que la valeur de la fonction coût a été divisée par 10 000 au cours de l'assimilation, pour atteindre  $5 \times 10^{-6}$ . Cela signifie que la fonction coût a été correctement minimisée. Pour s'en convaincre, la figure 5.17 représente sur le même graphique la composante longitudinale de la vitesse  $\gamma \mathbf{u}$  de transport des particules calculée d'une part en utilisant les valeurs de référence des variables  $\gamma$  et  $\mathbf{u}$  (trait en pointillés), d'autre part en utilisant leur valeur optimale identifiée (trait continu gris). Enfin, la vitesse d'une particule observée est tracée avec des points noirs. On voit une bonne correspondance entre les deux dernières courbes, qui correspond à une très faible valeur du second terme de la fonction coût.

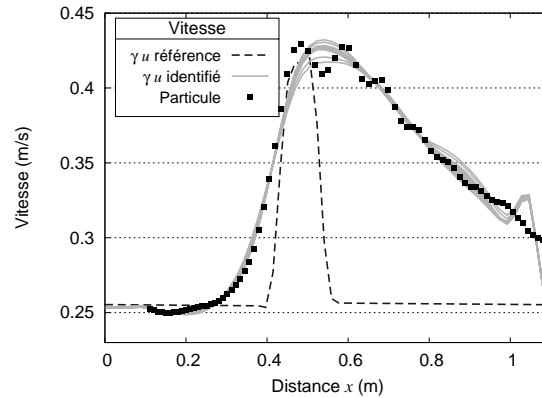


FIG. 5.17 – Comparaison de la vitesse des particules filtrées et de la vitesse de surface modèle. Trait fin : composante longitudinale de la vitesse de surface  $\gamma u$ . Points noirs : vitesse d'une particule correspondant à une trajectoire filtrée utilisée pour l'assimilation de données.

En ce qui concerne les variables de contrôle, on remarque tout d'abord sur la figure 5.16 (a) que la topographie identifiée ne correspond pas à l'obstacle présent dans l'écoulement réel : au lieu d'une forme rectangulaire bien marquée, on trouve une bosse dont l'étalement dans la direction longitudinale est beaucoup plus importante. Cependant, en comparant avec l'hypothèse *a priori* du fond plat, on constate que l'amplitude de l'obstacle réel est relativement bien retrouvée.

Comment interpréter l'extension de la forme identifiée de part et d'autre de l'obstacle réel? Nous avons évoqué dans le paragraphe 5.3.3 la formation dans les écoulements hydrauliques de zones de recirculation en présence d'une "marche", c'est-à-dire en présence d'une variation importante de la topographie. À l'intérieur d'une telle structure, le fluide tourne sur lui-même et par conséquent le débit est globalement nul sur le volume total d'une zone de recirculation. Or, du point de vue des équations de Saint-Venant, le débit en un point donné correspond à l'intégration sur la verticale du débit tridimensionnel.

On pourrait dès lors interpréter la topographie identifiée comme le recouvrement de telles zones de recirculation : celles-ci seraient vues par le modèle comme faisant partie du fond du canal. Seule la partie de l'écoulement participant au débit effectif serait alors représentée dans les équations de conservation du modèle Saint-Venant. D'un point de vue qualitatif, la forme de la recirculation en aval correspondrait bien à celle présentée de manière schématique sur la figure 5.15. Une recirculation plus petite serait également présente juste en amont de l'obstacle.

D'un point de vue quantitatif, un critère de validation pertinent est le rapport entre la longueur  $L_r$  de la recirculation dans la direction longitudinale et la hauteur de l'obstacle  $h_p$  [76]. Si l'on regarde nos résultats, en interprétant la topographie identifiée comme structure intégrant des zones de recirculation, ce rapport est proche de 12 pour la recirculation en aval de l'obstacle. Fritz et Hager [24] ont étudié expérimentalement des écoulements au-dessus de seuils trapézoïdaux symétriques. Ils ont observé que dans le cas d'écoulements de type *jet de surface* avec recirculation et ondes de surface, le rapport  $\frac{L_r}{h_p}$  est correctement estimé par la relation :

$$\frac{L_r}{h_p} = 6.8 \frac{h_s}{h_p} \left( 1 - \frac{h_s - h_p}{h_e - h_p} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (5.13)$$

où  $h_e$  et  $h_s$  sont les hauteurs d'eau respectivement en amont et en aval de l'obstacle. Avec nos données (approximativement  $h_e = 109 \text{ mm}$  et  $h_s = 107 \text{ mm}$ ), cette formule donne un rapport égal à 10.8.

Cependant, cette formule a été établie pour un obstacle de forme trapézoïdale et dans notre cas, l'obstacle est de forme rectangulaire. Nakayama et Yokojima [66] ont effectué des simulations numériques basées sur les équations de Navier-Stokes à surface libre dans une configuration semblable à celle de notre écoulement. Leurs résultats sont confrontés à des données expérimentales issues de travaux précédents et montrent un rapport  $\frac{L_r}{h_p}$  proche de 11. Cela indique que l'ordre de grandeur obtenu par application de la formule (5.13) est encore bon pour notre obstacle de section rectangulaire. Cette vraisemblance physique vient confirmer notre hypothèse selon laquelle la topographie identifiée correspondrait bien aux zones de recirculations autour de l'obstacle.

Pour ce qui est des autres variables de contrôle, on note que les conditions initiales identifiées, représentées sur les figures 5.16 (c) et (d), correspondent plutôt bien à un écoulement stationnaire. En effet, si l'on réalise une simulation en utilisant les variables de contrôle optimales, l'état final stabilisé de l'écoulement n'est pas très éloigné des conditions initiales identifiées, mises à part de petites variations dans la direction transversale.

Le coefficient  $\gamma$  sur la figure 5.16 (e) est légèrement inférieur à sa valeur de référence au dessus de la recirculation amont et légèrement supérieur au dessus de la recirculation aval. Concernant la brusque augmentation de sa valeur lorsque  $x > 0.9$ , elle se produit dans une partie du domaine où la correspondance entre la vitesse des particules filtrées et la vitesse de transport identifiée n'est pas très bonne, comme le montre la figure 5.17. Cela laisse supposer que la sensibilité des observations de trajectoires à la valeur du coefficient  $\gamma$  dans cette région est faible et donc que le résultat n'y est pas significatif.

La figure 5.16 (b) montre la valeur identifiée du coefficient de Manning. Ce résultat ne semble cependant pas pertinent d'un point de vue physique. En effet, sur une zone de recirculation, le gradient de vitesse verticale, et par conséquent le frottement, ne sont pas traduits correctement par une loi de type Manning.

Pour conclure sur cette expérience, on a mis en évidence le fait que la topographie identifiée rend compte de la présence de l'obstacle réel ainsi que des recirculations de part et d'autre de celui-ci. Les conditions initiales identifiées correspondent quasiment à un écoulement permanent au-dessus de ce recouvrement. En revanche, la valeur du coefficient  $\gamma$  et celle du coefficient de Manning ne semblent pas significatives.

## Expérience 2

Dès lors, ces constatations nous mènent à réaliser une nouvelle expérience d'assimilation de données en ne cherchant à identifier que la topographie et les conditions initiales. Le coefficient de Manning est fixé à sa valeur initiale  $n = 0.01$  et le coefficient  $\gamma$  à sa valeur initiale 1.1. Les observations considérées sont les mêmes que dans l'expérience précédente et la formulation de la fonction coût reste celle donnée en (5.12).

Les résultats de l'assimilation sont présentés sur la figure 5.18. On remarque qu'ils ne sont pas fondamentalement différents d'un point de vue qualitatif par rapport à l'expérience précédente. La topographie identifiée n'est pas modifiée de manière importante, si ce n'est que l'amplitude de la bosse est légèrement supérieure, tout en restant comparable avec la hauteur de l'obstacle réel. Les conditions initiales correspondent toujours relativement bien à un écoulement permanent. L'amplitude

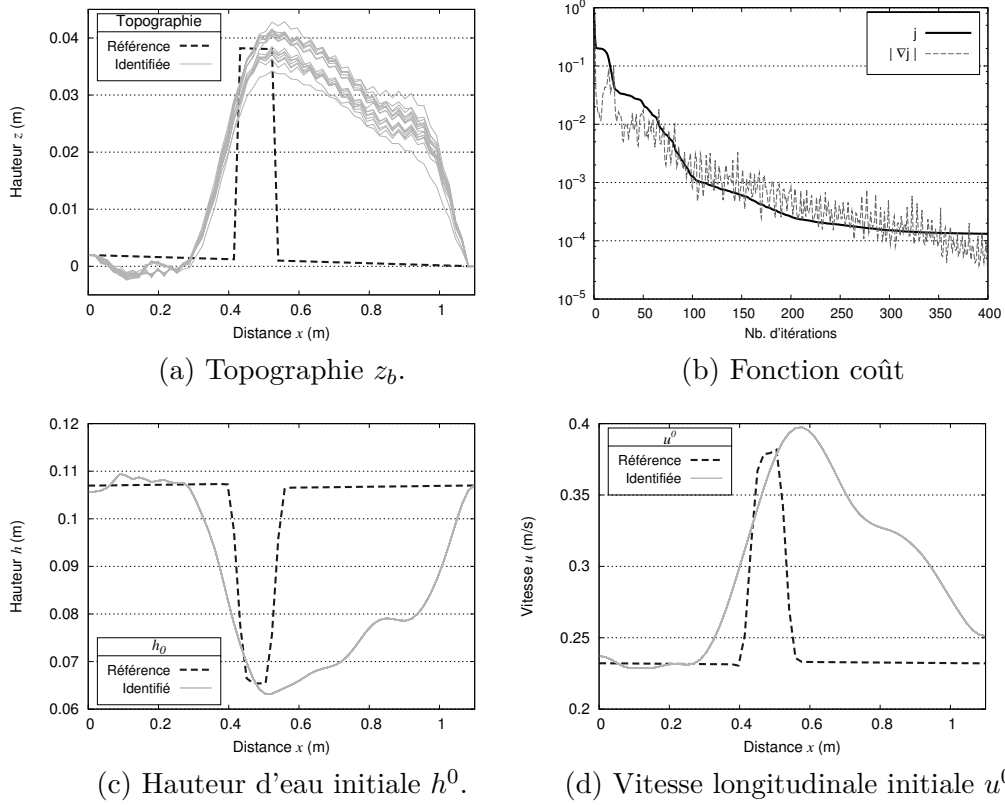


FIG. 5.18 – Identification de la topographie  $z_b$  et des conditions initiales à partir d'observations de hauteur d'eau et de trajectoires de particules transportées par l'écoulement. Trait en pointillés : solution Saint-Venant avec paramètres de référence. Trait plein grisé : valeur des paramètres identifiés.

du pic de vitesse longitudinale est également légèrement supérieure à ce qu'elle était dans la première expérience.

### 5.3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie une expérience d'assimilation de données réelles de trajectoires de particules pour un écoulement dans un canal au-dessus d'un obstacle immergé. Les particules observées sont des confettis transportés à la surface de l'eau et filmés par une caméra vidéo.

La configuration étudiée comportait des structures hydrauliques qui ne sont pas compatibles avec les hypothèses des équations de Saint-Venant : deux recirculations dans l'écoulement de part et d'autre d'une planche de section rectangulaire. À

partir d'hypothèses *a priori* sur la configuration ne prenant pas en compte la présence de l'obstacle, l'utilisation d'observations de hauteur d'eau et de trajectoires de particules dans un processus d'assimilation de données a permis d'identifier des paramètres du modèle Saint-Venant qui représentent au mieux cet écoulement localement tridimensionnel. Il nous a été possible d'interpréter les paramètres identifiés de manière satisfaisante d'un point de vue physique. Ainsi, l'amplitude de l'obstacle a été correctement retrouvée. La présence des recirculations peut également être détectée dans la topographie équivalente du modèle Saint-Venant, qui correspondrait à leur recouvrement autour de l'obstacle. La longueur de la recirculation identifiée en aval est conforme aux ordres de grandeurs habituellement rencontrés dans des configurations hydrauliques semblables. Par ailleurs, les conditions initiales identifiées correspondent quasiment à un état permanent de l'écoulement, ce qui montre qu'elles sont conformes à un état physique cohérent avec les autres paramètres du modèle.





# Conclusion générale

La problématique générale des travaux présentés dans cette thèse concerne l'assimilation variationnelle de données dans le cadre de l'hydraulique fluviale, et plus particulièrement l'assimilation de données lagrangiennes de trajectoires de particules dans un modèle d'écoulement basé sur les équations de Saint-Venant.

Nous avons présenté dans le premier chapitre les fondements de l'assimilation variationnelle de données du point de vue de la théorie du contrôle optimal, en abordant la définition du problème de contrôle du modèle direct et la détermination du modèle adjoint, afin de pouvoir exprimer le problème d'assimilation sous la forme d'un système d'optimalité. L'accent a ensuite été mis sur la mise en œuvre informatique du modèle adjoint à l'aide d'outils de différentiation automatique de code.

## Le logiciel Dassflow

Un aspect important de cette thèse a été la mise au point d'un modèle numérique d'écoulement basé sur les équations de Saint-Venant bidimensionnelles et concrétisé dans le développement du logiciel Dassflow. Pouvant être utilisé pour la réalisation de simulations directes, il a surtout été construit dans le but d'effectuer des expériences d'assimilation de données. Le modèle numérique direct repose sur un schéma volumes finis et permet d'utiliser des maillages structurés sur des domaines rectangulaires aussi bien que des maillages déstructurés mêlant des éléments triangulaires et quadrangulaires. Le logiciel inclut tous les outils nécessaires à la réalisation d'expériences d'assimilation de données, y compris des expériences jumelles pour lesquelles les observations synthétiques sont créées par le modèle. En particulier, le modèle numérique adjoint a été écrit à l'aide de l'outil de différentiation automatique Tapenade.

## Observations eulériennes

Le logiciel Dassflow a été utilisé pour toutes les expériences d'assimilation réalisées au cours de cette thèse. Dans une première série d'expériences, nous nous sommes intéressés à des observations de nature eulérienne, classiquement disponibles pour les rivières instrumentées. Nous avons présenté tout d'abord l'identification de la valeur de conditions aux limites à partir de données réelles de hauteurs d'eau et de débits pour une section du delta de la rivière des Perles (Xi Jiang).

Ensuite, pour une configuration correspondant à une onde de crue dans un canal, nous avons étudié dans le cadre d'expériences jumelles l'identification conjointe du débit et du coefficient de Manning à partir d'observations synthétiques de faible densité spatiale. Nous avons montré pour ce cas-test académique que l'utilisation de simples mesures de hauteur d'eau en un point fixe du domaine, continues en temps, suffit à l'identification du débit si tous les autres paramètres du modèle sont connus avec précision. Dans le cas contraire, si l'un des paramètres est mal estimé comme c'était le cas du coefficient de Manning dans notre expérience, l'information portée par les seules observations de hauteur d'eau peut devenir insuffisante et conduire à une mauvaise identification.

Ce constat illustre un problème plus général auquel est confrontée la simulation en hydraulique fluviale : le manque de données d'observation. Le développement des moyens de télédétection pour l'observation des rivières permet cependant d'envisager la prise en compte de nouvelles formes de données dans les méthodes d'assimilation. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés en particulier à des observations de nature lagrangienne.

## Observations lagrangiennes

Nous avons présenté une méthode d'assimilation variationnelle de trajectoires de particules. Les données lagrangiennes de trajectoires sont représentées comme la variable d'état d'un modèle de transport, faiblement couplé avec le modèle d'écoulement et décrivant le déplacement des particules à la surface de l'eau. Ainsi, la prise en compte de ce type d'observations dans le processus d'assimilation de données est faite par l'ajout dans la fonction coût d'un terme mesurant la distance entre les positions des particules observées et celles de leurs homologues du modèle. La définition de la vitesse de transport est un point déterminant et doit être établie en relation avec les variables du modèle d'écoulement. Dans le cas de notre modèle Saint-Venant, nous avons proposé de la définir comme un multiple de la vitesse du modèle, sur des considérations physiques valables dans le cadre restreint d'un écoulement dans un canal à fond plat. Par ailleurs, une méthode de filtrage

des observations de trajectoires a été proposée dans le but de supprimer les perturbations de surface de petites échelles ainsi que les effets de la quantification introduite par le système d'observation des trajectoires.

La méthode présentée a été mise en œuvre avec le logiciel Dassflow à travers une série d'expériences numériques. Nous avons tout d'abord montré, dans le cadre d'expériences jumelles, que l'apport d'observations de trajectoires de particules améliorerait sensiblement la qualité de l'identification conjointe du débit et du coefficient de Manning dans le cas test correspondant à une onde de crue dans un canal, par rapport à de simples observations eulériennes de la hauteur d'eau.

Nous avons ensuite présenté une seconde série d'expériences jumelles dans laquelle des observations bruitées de trajectoires de particules couplées à des mesures de hauteur d'eau permettaient d'identifier conjointement la topographie et des conditions initiales de l'écoulement de manière satisfaisante. Dans ce cas, nous avons mis en évidence l'intérêt du filtrage des trajectoires sur la qualité de l'identification.

Enfin, nous avons réalisé une expérience faisant intervenir des données réelles issues d'un écoulement dans un canal avec un obstacle immergé. Les trajectoires de confettis lâchés à la surface de l'écoulement ont été extraites d'une séquence vidéo et utilisées conjointement à des mesures de hauteur d'eau dans une expérience d'assimilation de données. La présence de l'obstacle était à l'origine de recirculations verticales dont l'existence est incompatible avec les hypothèses des équations Saint-Venant. Néanmoins, l'assimilation des données de trajectoires a permis l'identification de paramètres auxquels il nous a parfois été possible de donner une interprétation physique satisfaisante. Ainsi, une topographie équivalente a été identifiée comme représentant l'obstacle original et le recouvrement des recirculations. D'autre part, nous avons déterminé une valeur du coefficient multiplicateur  $\gamma$  reliant la vitesse Saint-Venant à la vitesse de transport, sans toutefois pouvoir en donner une signification physique. De la même manière, le coefficient de Manning obtenu n'a pas été jugé pertinent d'un point de vue physique. Ce dernier paramètre n'influence cependant pas l'écoulement de manière significative dans la configuration étudiée. Enfin, nous sommes parvenus à identifier des conditions initiales correspondant à un écoulement permanent en moyenne.



# Perspectives

De nombreux axes de recherche sont envisageables dans la continuité des travaux présentés dans cette thèse. Nous allons maintenant en exposer quelques-uns pour terminer.

## Identification d'erreurs de modèle

L'écoulement considéré dans l'expérience d'assimilation de données réelles de trajectoires présentée dans la partie 5.3 comportait des structures hydrauliques que le modèle numérique basé sur les équations de Saint-Venant n'était *a priori* pas capable de simuler correctement. Dans les résultats présentés, une topographie équivalente au recouvrement de la topographie réelle et des recirculations a été interprétée comme l'expression par le modèle de la présence de ces structures. Un modèle capable de simuler directement des recirculations hydrauliques dans un tel contexte devrait être basé sur les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles à surface libre. Il demanderait toutefois des capacités de calcul beaucoup plus importantes et serait difficile à déployer en pratique pour la simulation d'une section de rivière en grandeur réelle.

Cependant, nous avons introduit brièvement dans le chapitre 1 (page 21) une méthode d'identification d'une erreur de modèle [94, 95] permettant de prendre en compte dans le problème d'assimilation les défauts de représentativité des observations par le modèle d'écoulement. Dans cette approche, l'équation d'état est modifiée par l'ajout d'un terme dont on cherche à identifier la valeur optimale afin de réduire au mieux l'écart entre la solution numérique et la réalité de l'écoulement.

Il serait intéressant d'appliquer cette méthode à notre problème d'assimilation de trajectoires réelles. Plusieurs difficultés sont alors à prendre en considération. Tout d'abord, il faut déterminer la forme que peut prendre le terme d'erreur dans les équations de Saint-Venant pour qu'il puisse être en mesure de rendre compte de la présence d'une structure hydraulique tridimensionnelle. Il s'agit d'un problème

de modélisation devant faire intervenir des considérations physiques. D'autre part, l'identification d'une erreur de modèle est susceptible d'augmenter sensiblement la taille du vecteur de contrôle. Afin de réduire ce surcoût, il est possible de recourir à une méthode de réduction d'ordre [96].

## Flotteurs lagrangiens

Concernant les moyens envisageables d'observation de trajectoires, nous avons mentionné dans la partie 4.1 deux approches possibles en fonction de l'échelle d'observation considérée. Nous évoquons d'une part une échelle locale couvrant une partie restreinte en espace du domaine de l'écoulement, mais avec une densité d'observation potentiellement importante. Il s'agit par exemple de la configuration de l'expérience présentée dans la partie 5.3 utilisant des trajectoires de confettis extraites d'une séquence vidéo.

Une autre possibilité consiste à se placer à une échelle spatiale plus grande, quitte à perdre en densité d'observation. Nous donnions l'exemple du suivi de petits flotteurs équipés de capteurs GPS lâchés dans l'écoulement. Dans cet ordre d'idées, Bayen et Stacey [6] proposent d'exploiter des données de trajectoires de flotteurs dérivants dans un processus d'assimilation de données, dans le but d'améliorer la modélisation de l'écoulement dans le delta formé par les fleuves San-Joaquin et Sacramento (Californie). Concernant la collecte d'observations, le projet ambitieux de mettre en place une plate-forme expérimentale permettant de déployer un réseau capteurs lagrangiens et d'enregistrer en temps réel leur position à l'aide d'un système GPS.

Ce projet se rapproche beaucoup des travaux présentés dans cette thèse. Il serait très intéressant de vérifier si l'apport des données de position des flotteurs permet par exemple de déterminer les conditions aux limites du domaine d'étude, comme nous l'avons montré dans le cadre des expériences jumelles présentées dans la partie 5.1. D'une manière plus générale, l'application à ces observations réelles de la méthode d'assimilation de données lagrangiennes développée dans Dassflow est une perspective enthousiasmante qui va faire l'objet d'une collaboration à court terme.

## Assimilation de contours

Nous avons présenté dans les chapitres 4 et 5 l'assimilation de trajectoires de particules dans un modèle Saint-Venant. Une extension naturelle de la méthode consiste à considérer l'évolution dans l'écoulement de structures plus complexes que

de simples particules ponctuelles, comme par exemple des structures turbulentes ou des fronts de mousses transportés à la surface par le courant. Creutin *et al.* [19] ont étudié ce genre d'observations pour l'estimation de champs denses de vitesses de surface dans le but d'évaluer le débit sur une section de la rivière Iowa. Mais on peut imaginer l'utilisation de ces observations lagrangiennes dans le cadre d'assimilation de données présenté dans cette thèse.

Dans un tout autre ordre d'idées, l'imagerie satellite ou aérienne rend possible l'observation sur une photographie ou un image radar du domaine d'extension d'une inondation. En recoupant cette information avec des données sur le terrain, il est possible d'en déduire la hauteur d'eau de manière distribuée sur le domaine [75, 47] et de l'utiliser dans un cadre d'assimilation de données [48, 55]. Les travaux cités portent sur une unique image statique. Mais en considérant une série temporelle d'images lors d'un épisode de crue, il serait intéressant d'étudier le caractère lagrangien de l'évolution d'un front d'inondation et l'information qu'une telle observation peut apporter sur la dynamique de l'écoulement.

Un point commun dans ces deux perspectives tient dans la représentation des données par le modèle numérique. Si la trajectoire d'une particule peut être caractérisée simplement par la succession de ses positions dans le domaine, la prise en compte des contours de structures complexes ou de fronts d'inondations par une méthode d'assimilation de données demande de faire appel à des formes de représentation plus évoluées.

Dans les méthodes de *level sets* [86], une courbe fermée dans un espace bidimensionnel est vue comme la ligne de niveau zéro d'une fonction scalaire  $\phi$  définie sur tout le domaine de calcul, par exemple la fonction distance signée. Ces méthodes sont utilisées dans un nombre toujours croissant d'applications, notamment dans le domaine du traitement de l'image ou pour la représentation d'interfaces dans la simulation numérique des fluides physiques [71, chapitres III et IV]. Elles permettent de gérer implicitement les changements de topologie des courbes au cours du temps.

Sur ces principes, Papadakis *et al.* [72] proposent une méthode pour le suivi de contours d'objets dans une séquence d'images, dans un cadre variationnel inspiré par les méthodes d'assimilation de données. Pour une application en hydraulique fluviale, un modèle de transport de contours basé sur une représentation *level sets*, couplé au modèle d'écoulement Saint-Venant sur le principe décrit dans cette thèse, permettrait alors la prise en compte de ces observations lagrangiennes dans un processus d'assimilation variationnelle de données. Dans un tel contexte, il est possible de construire une fonction coût mesurant la distance entre les variables du modèle et les observations directement dans l'espace des fonctions  $\phi$ .

Des expériences numériques préliminaires ont donné des résultats laissant entre-

voir des perspectives encourageantes, mais qui nécessiteraient des développements n'ayant pas pu être réalisés dans le cadre de cette thèse.



# Bibliographie

- [1] R. J. Adrian. Twenty years of particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 39 :159–169, 2005.
- [2] G. J. Arcement and V. R. Schneider. Guide for selecting Manning’s roughness coefficients for natural channels and flood plains. U.S. Department of Transportation, Federal Highways Administration, 1984. FHWA-TS-84-204.
- [3] G. A. Atanov, E. G. Evseeva, and E. A. Meselhe. Estimation of roughness profile in trapezoidal open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(3) :309–312, 1999.
- [4] M. Audinet. *Hydrométrie appliquée au cours d’eau*. Eyrolles, 1995.
- [5] P. D. Bates, K. J. Marks, and M. S. Horritt. Optimal use of high-resolution topographic data in flood inundation models. *Hydrological Processes*, 17 :537–557, 2003.
- [6] A. Bayen and M. T. Stacey. Calibration-free approach to modeling delta flows and transport. UC Berkeley, 2006.
- [7] E. Bélanger and A. Vincent. Data assimilation (4D-VAR) to forecast flood in shallow-waters with sediment erosion. *Journal of Hydrology*, 300(1–4) :114–125, 2005.
- [8] A. Bermúdez, A. Dervieux, J.-A. Désidéri, and M. E. Vázquez-Cendón. Upwind schemes for two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 :49–72, 1998.
- [9] A. Bermúdez and M. E. Vázquez-Cendón. Upwind methods for hyperbolic conservations laws with source term. *Computers and Fluids*, 23 :1049–1071, 1994.
- [10] C. H. Bischof, A. Carle, G. F. Corliss, A. Griewank, and P. D. Hovland. ADIFOR : Generating derivative codes from Fortran programs. *Scientific Programming*, 1(1) :11–29, 1992.

- [11] C. H. Bischof, A. Carle, P. Khademi, and A. Mauer. ADIFOR 2.0 : Automatic differentiation of Fortran 77 programs. *IEEE Computational Science & Engineering*, 3(3) :18–32, 1996.
- [12] C. H. Bischof, B. Lang, and A. Vehreschild. Automatic differentiation for MATLAB programs. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2(1) :50–53, 2003.
- [13] C. H. Bischof, L. Roh, and A. Mauer. ADIC — An extensible automatic differentiation tool for ANSI-C. *Software-Practice and Experience*, 27(12) :1427–1456, 1997.
- [14] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. Meteorological Training Course Lecture Series, ECMWF, 1999.
- [15] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [16] E. F. Carter. Assimilation of lagrangian data into a numerical model. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 13(3–4) :335–348, 1989.
- [17] W. Castaings, D. Dartus, M. Honnorat, F.-X. Le Dimet, Y. Loukili, and J. Monnier. Automatic differentiation : A tool for variational data assimilation and adjoint sensitivity analysis for flood modeling. In H. M. Bückler, G. Corliss, P. Hovland, U. Naumann, and B. Norris, editors, *Automatic Differentiation : Applications, Theory, and Implementations*, volume 50 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 249–262. Springer, 2005.
- [18] P. Courtier and O. Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II : Numerical results. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 113(1329–1347), 1987.
- [19] J. D. Creutin, M. Muste, A. A. Bradley, S. C. Kim, and A. Kruger. River gauging using PIV techniques : a proof of concept experiment on the Iowa River. *Journal of Hydrology*, 277 :182–194, 2003.
- [20] Y. Ding, Y. Jia, and S. S. Y. Wang. Identification of Manning’s roughness coefficients in shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(6) :501–510, 2004.
- [21] D. Elizondo, C. Faure, and B. Cappelaere. Automatic- versus manual- differentiation for non-linear inverse modeling. Technical Report RR-3981, INRIA, 2000.
- [22] G. Evensen. Sequential data assimilation with a non-linear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, 99(C5) :10143–10162, 1994.
- [23] G. Fourquet. *Développement d’un système hydrométrique par analyse d’images numériques. Évaluation d’une année de fonctionnement continu*

- sur l'Isère à Saint-Martin d'Hères*. PhD thesis, LTHE, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005. En français.
- [24] H. M. Fritz and W. H. Hager. Hydraulics of embankment weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(9) :963–971, 1998.
- [25] D. C. Froehlich. Impact project field tests 1 and 2 : “Blind” simulation by *DaveF*, 2002.
- [26] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint–Venant system for laminar shallow water ; Numerical validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, 1(1) :89–102, 2001.
- [27] M. Ghil and P. Malanotte-Rizzoli. Data assimilation in meteorology and oceanography. *Advances in Geophysics*, 33 :141–266, 1991.
- [28] R. Giering and T. Kaminski. Recipes for adjoint code construction. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 24(4) :437–474, 1998.
- [29] R. Giering and T. Kaminski. Applying TAF to generate efficient derivative code of Fortran 77-95 programs. In *Proceedings of GAMM 2002, Augsburg, Germany*, volume 2, pages 54–57, 2003.
- [30] J.-C. Gilbert and C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable storage Quasi–Newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45 :407–435, 1989.
- [31] J.-C. Gilbert and C. Lemaréchal. *The module M1QN3 – Version 3.1*. INRIA, 2006.
- [32] S. K. Godunov. A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 47 :271–306, 1959. En Russe.
- [33] A. Griewank. *Evaluating Derivatives : Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*, volume 19 of *Frontiers in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [34] A. Griewank. A mathematical view of automatic differentiation. *Acta Numerica*, 12 :321–398, 2003.
- [35] A. Griewank, D. Juedes, and J. Utke. Algorithm 755 : ADOL-C : A package for the automatic differentiation of algorithms written in C/C++. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(2) :131–167, 1996.
- [36] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bull. Univ. Princeton*, 13, 1902.
- [37] J. Hadamard. *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Hermann, Paris, 1932.

- [38] A. Harten, P. Lax, and A. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25 :35–61, 1983.
- [39] J. Hartnack and H. Madsen. Data assimilation in river flow modelling. In *4<sup>th</sup> DHI software conference, 6–8 june 2001*, Scanticon Conference Center, Helsingør, Danemark, 2001.
- [40] L. Hascoët and V. Pascual. TAPENADE 2.1 users’s guide. Rapport Technique RT–300, INRIA, 2004.
- [41] A. Hauet. *Estimation de débit et mesure de vitesse en rivière par Large-Scale Particle Image Velocimetry*. PhD thesis, LTHE, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006. En français.
- [42] M. Honnorat, E. Huot, F.-X. Le Dimet, J. Monnier, and N. Rivière. Lagrangian data assimilation in an open channel flow. *À paraître*, 2007.
- [43] M. Honnorat, X. Lai, J. Monnier, and F.-X. Le Dimet. Variational data assimilation for 2d fluvial hydraulics simulations. CMWR XVI — Computational Methods in Water Resources XVI International Conference, Copenhagen, Denmark, June 19–22 2006.
- [44] M. Honnorat, F.-X. Le Dimet, Y. Loukili, and J. Monnier. DASSFLOW : a direct and adjoint model for 2d shallow water flows. Research Report RR–5756, INRIA, 2005.
- [45] M. Honnorat, J. Marin, J. Monnier, and X. Lai. DASSFLOW v1 : a variational data assimilation software for 2d river flows. Research Report RR–6150, INRIA, 2007.
- [46] M. Honnorat, J. Monnier, and F.-X. Le Dimet. Lagrangian data assimilation for river hydraulics simulations. *Computing and Visualization in Science*, 2007. Accepté.
- [47] R. Hostache. *Analyse d’images satellites d’inondations pour la caractérisation tridimensionnelle de l’aléa et l’aide à la modélisation hydraulique*. PhD thesis, Cemagref / ENGREF, Montpellier, 2006. En français.
- [48] R. Hostache, X. Lai, J. Monnier, C. Puech, and A. Paquier. Assimilation of spatial distributed water levels into a shallow-water flood model. Part II : Moselle river. *Soumis*, 2007.
- [49] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*, volume 64 of *Applied Mathematical Sciences*. Academic Press, New York, 1970.
- [50] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME – Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45, 1960.

- [51] M. Kamachi and J. J. O'Brien. Continuous data assimilation of drifting buoy trajectory into an equatorial Pacific Ocean model. *Journal of Marine Systems*, 6 :159–178, 1995.
- [52] R. H. Khatibi, J. J. R. Williams, and P. R. Wormleaton. Identification problem of open-channel friction parameters. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(12) :1078–1088, 1997.
- [53] Kitware, Inc, editor. *The Visualization Toolkit User's Guide*, chapter 15.3, pages 323–336. Kitware, Inc, 2004.
- [54] L. Kuznetsov, K. Ide, and C. K. R. T. Jones. A method for assimilation of lagrangian data. *Monthly Weather Review*, 131(10) :2247–2260, 2003.
- [55] X. Lai and J. Monnier. Assimilation of spatial distributed water levels into a shallow-water flood model. Part I : method and toy test case. *Soumis*, 2007.
- [56] F.-X. Le Dimet. Une étude générale d'analyse objective variationnelle des champs météorologiques. Rapport scientifique LAMP 28, Université de Clermond II, BP 45 63170 Aubière France, 1980.
- [57] F.-X. Le Dimet and J. Blum. Assimilation de données pour les fluides géophysiques. *Matapli*, 67 :33–55, 2002.
- [58] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38(A) :97–110, 1986.
- [59] R. J. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of Computational Physics*, 146 :346–365, 1998.
- [60] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [61] R. J. LeVeque and D. L. George. High-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states. In P. Liu, editor, *Proceedings of Long-Wave Workshop, Catalina*, page to appear, 2004.
- [62] J.-L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971.
- [63] H. Madsen, J. Hartnack, and J. V. T. Sørensen. Data assimilation in a flood modelling system using the Ensemble Kalman filter. In *CMWR-XVI*, Copenhagen, Denmark, june 2006.
- [64] C. Mazauric. *Assimilation de données pour les modèles d'hydraulique fluviale. Estimation de paramètres, analyse de sensibilité et décomposition de domaine*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, LMC-IMAG, 2003. En français.

- [65] M. Muste, Z. Xiong, J. Schöne, and Z. Li. Validation and extension of image velocimetry capabilities for flow diagnostic in hydraulic modeling. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(3) :175–185, 2004.
- [66] A. Nakayama and S. Yokojima. Modeling free-surface fluctuation effects for calculation of turbulent open-channel flows. *Environmental Fluid Mechanics*, 3 :1–21, 2003.
- [67] U. Naumann and J. Riehme. A differentiation-enabled Fortran 95 compiler. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31(4), 2005.
- [68] I. Nezu. Open-channel flow turbulence and its research prospect in the 21th century. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(4) :229–246, 2005.
- [69] M. Nodet. *Modélisation mathématique et assimilation de données lagrangiennes pour l’océanographie*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Nice, 2005. En français.
- [70] M. Nodet. Variational assimilation of lagrangian data in oceanography. *Inverse Problems*, 22 :245–263, 2006.
- [71] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2002.
- [72] N. Papadakis, E. Mémin, and F. Cao. A variational approach for object contour tracking. In *ICCV’05 Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision*, Beijing, China, 2005.
- [73] B. Perthame and C. Simeoni. A kinetic scheme for the saint-venant system with a source term. *Calcolo*, 38(4) :201–231, 2001.
- [74] D. T. Pham, J. Verron, and M. C. Roubaud. A singular evolutive extended kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine Systems*, 16 :323–340, 1998.
- [75] D. Raclot. *Méthodologie d’exploitation quantitative des photographies aériennes d’inondation de plaine*. PhD thesis, Université de Montpellier II, Cemagref / ENGREF, Montpellier, 2003. En français.
- [76] N. Rivière. Zones de recirculation à l’aval d’un déversoir à seuil épais. Communication personnelle, décembre 2006.
- [77] N. Rostaing, S. Dalmas, and A. Galligo. Automatic differentiation in Odysée. *Tellus A*, 45(5) :558–568, 1993.
- [78] H. Roux and D. Dartus. Data assimilation applied to hydraulic parameter identification. In *British hydrological society international conference 2004, hydrology : science and practice for the 21st century*, pages 354–361, London, United Kingdom, 2004.

- [79] H. Roux and D. Dartus. Parameter identification using optimization techniques in open-channel inverse problems. *Journal of Hydraulic Research*, 43(3) :311–320, 2005.
- [80] H. Roux, D. Raclot, D. Dartus, and C. Puech. Hydraulic parameter identification using aerial photographs. In IEEE, editor, *International Geoscience and Remote Sensing Symposium. IGARSS '03*, volume 2, pages 1172–1174, 2003.
- [81] A. Barré de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 73 :147–154, 237–240, 1871.
- [82] H. Salman, L. Kuznetsov, and C. K. R. T. Jones. A method for assimilating lagrangian data into a shallow-water-equation ocean model. *Monthly Weather Review*, 134(4) :1081–1101, 2006.
- [83] Y. K. Sasaki. A fundamental study of the numerical prediction based on the variational principle. *J. Meteor. Soc. Japan*, 33(6) :262–275, 1955.
- [84] Y. K. Sasaki. An objective analysis based on the variational method. *J. Meteor. Soc. Japan*, 36(3) :77–88, 1958.
- [85] Y. K. Sasaki. Some basic formalisms in numerical variational analysis. *Monthly Weather Review*, 98 :875–883, 1970.
- [86] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Science*. Cambridge University Press, Londres, 1999.
- [87] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3) :506–517, 1968.
- [88] O. Talagrand and P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 113(1311–1328), 1987.
- [89] Tecplot, Inc. *Tecplot™ Data format guide*. Bellevue, WA, 2006.
- [90] O. Thual. Ondes de surface et ressauts. Article Pédagogique Multimedia, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- [91] A. Tikhonov and V. Arsénine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Éditions Mir, Moscou, 1976. Traduit du Russe.
- [92] E. F. Toro. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley and Sons Ltd, 2001.
- [93] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4 :25–34, 1994.

- [94] P. A. Vidard. *Vers une prise en compte de l'erreur modèle en assimilation de données 4D-variationnelle*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Décembre 2001. En français.
- [95] P. A. Vidard, E. Blayo, F.-X. Le Dimet, and A. Piacentini. 4D variational data analysis with imperfect model. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65 :489–504, 2000.
- [96] P. A. Vidard, A. Piacentini, and F.-X. Le Dimet. Variational data analysis with control of the forecast bias. *Tellus*, 56(A) :177–188, 2004.
- [97] T. Williams, C. Kelley, and L. Hecking. *GNU PLOT : An Interactive Plotting Program*. Manual, version 4.0, <http://www.gnuplot.info/>, 2004.
- [98] S. Wu and N. Rajaratnam. Submerged flow regimes of rectangular sharp-crested weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122(7) :412–414, 1996.
- [99] J. Yang. *Assimilation de données variationnelle pour les problèmes de transport des sédiments en rivière*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, LMC-IMAG, 1999. En français.
- [100] C. Zoppou and S. Roberts. Explicit schemes for dam-break simulations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(1) :11–34, January 2003.